Exercice 1 Soit $I = [-1, 1]$. Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit l'application

$$f_n : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^n.$$

Décrire les trois ensembles suivants (en les écrivant comme une union finie d'intervalles).

$$\textbf{1)}\ A = \bigcap_{n\geq 1} \{x \in I\,;\, f_{n+1}(x) \leq f_n(x)\}. \quad \textbf{2)}\ B = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{y\in I} \{x \in I\,;\, f_n(x) \geq f_n(y)\}.$$

$$\textbf{3)}\ C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq N} \left\{x \in I\,;\, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Exercice 2 Déterminer si les applications suivantes, définies sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont des bijections.

a) $f(m,n) = 2^m 5^n$.

b) $g(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$.

Exercice 3 Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$ une application. Une application $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$ s'appelle une section de f.

a) Montrer que si f admet une section, alors f est surjective.

b) Montrer que toute section de f est injective.

Une application $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$ s'appelle une rétraction de f.

c) Montrer que si f possède une rétraction, alors f est injective.

d) Montrer que toute rétraction de f est surjective.

e) En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a $r = s$.

Exercice 4 On associe à une application $f : X \to Y$ deux applications : $\mathbf{f} : 2^X \to 2^Y$ et $\mathbf{f}^{-1} : 2^Y \to 2^X$, appelées respectivement application image directe et application image réciproque, et définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(A) &= \{y \in Y : \text{ il existe un } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}, \quad A \subset X\,; \\ \mathbf{f}^{-1}(B) &= \{x \in X : f(x) \in B\}, \quad B \subset Y. \end{aligned}$$

Soient deux parties $A \subset X$ et $B \subset Y$, ainsi que $(A_\mu)_{\mu\in M}$ une famille de parties de X et $(B_\nu)_{\nu\in N}$ une famille de parties de Y. Établir les propriétés suivantes :

$$\mathbf{f}^{-1}(B^\complement) = (\mathbf{f}^{-1}(B))^\complement, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(B)) \subset B, \qquad A \subset \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(A)), \qquad \mathbf{f}^{-1}\Big(\bigcap_{\nu\in N} B_\nu\Big) = \bigcap_{\nu\in N} \mathbf{f}^{-1}(B_\nu),$$

$$\mathbf{f}^{-1}\Big(\bigcup_{\nu\in N} B_\nu\Big) = \bigcup_{\nu\in N} \mathbf{f}^{-1}(B_\nu), \qquad \mathbf{f}\Big(\bigcap_{\mu\in M} A_\mu\Big) \subset \bigcap_{\mu\in M} \mathbf{f}(A_\mu), \qquad \mathbf{f}\Big(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu\Big) = \bigcup_{\mu\in M} \mathbf{f}(A_\mu).$$

Remarque. On fait systématiquement l'abus de notation qui consiste à écrire $f(A)$ pour $\mathbf{f}(A)$ et $f^{-1}(B)$ pour $\mathbf{f}^{-1}(B)$. Pire, lorsque $A = \{a\}$ ou $B = \{b\}$ sont des singletons, on écrit souvent $f(a)$ au lieu de $f(\{a\})$, alors que $f(\{a\})$ est le singleton $\{f(a)\}$, et $f^{-1}(b)$ au lieu de $f^{-1}(\{b\})$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ pouvant être vide ou contenir plus d'un élément.

Exercice 5 Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soient $V \subset X$ et $W \subset Y$.

a) Montrer l'équivalence : $V \subset f^{-1}(W) \iff f(V) \subset W$.

b) La proposition $V = f^{-1}(W) \iff f(V) = W$ est-elle vraie ?

Exercice 6 Soient E, F et G trois ensembles, et f une application de E vers F. On suppose que G a au moins deux éléments et on considère les applications :

$$f_* : E^G \to F^G \quad \text{définie par} \quad f_*(\varphi) = f \circ \varphi\,; \qquad f^* : G^F \to G^E \quad \text{définie par} \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. f_* est injective ;
3. f^* est surjective.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective ;
2. f_* est surjective ;
3. f^* est injective.

Exercice 1 Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables :

a) $\{2^n;\ n \geq 0\}$;

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;

d) l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 2 Soit X un ensemble dénombrable.

a) Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.

b) Qu'en est-il de l'ensemble des parties de X ? (Cantor)

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est un ensemble au plus dénombrable.

Exercice 4 Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables :

a) l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$;

b) l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$;

c) l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$;

d) l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ayant un nombre fini de termes non nuls.

Exercice 5 Soit $\mathscr{P} \subset \mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On appelle *nombre algébrique* tout nombre complexe qui est racine d'un polynôme appartenant à $\mathscr{P}$.

a) Donner un exemple (simple) de bijection entre $\mathscr{P}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^*)$.

b) En déduire que $\mathscr{P}$ est dénombrable.

c) Si $P \in \mathscr{P}$, on note $Z(P)$ l'ensemble des racines de P. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est $\bigcup_{P \in \mathscr{P}} Z(P)$.

d) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 6 Soit la partie $A = \{1/2^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $[0, 1[$.

a) Vérifier que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A, \\ 2x & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

définie une application de $[0, 1[$ dans $[0, 1]$.

b) Montrer que f est une bijection.

c) Utiliser la bijection f pour trouver une bijection de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$.

Exercice 7 Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$. Soit $\mathscr{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini. Soit $\mathscr{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est infini.

a) Vérifier que $2^{\mathbb{N}}$ est réunion disjointe de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{I}$, et que $\mathscr{F}$ est dénombrable.

b) Montrer que $\mathscr{I}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.

c) Soit la fonction $\phi : \mathscr{I} \to [0, 1[$ définie par

$$\phi(A) = \sum_{i \geq 0} \frac{\chi_A(i+1)}{2^{i+1}}, \quad A \in \mathscr{I},$$

où χ_A est la fonction indicatrice de A. Vérifier que cette fonction est bien définie.

d) Montrer que ϕ est une application bijective de $\mathscr{I}$ sur $[0, 1[$.

e) En déduire que $\mathbb{R}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.

Exercice 1

Soit E un ensemble. On considère deux distances d et d' sur E. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ on ait

$$d(x,y) \leq \alpha d'(x,y).$$

Montrer que les ouverts de (E,d) sont des ouverts de (E,d').

Exercice 2

Soit d_1 et d_2 deux applications de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, par

$$d_1(x,y) = |x^3 - y^3| \quad \text{et} \quad d_2(x,y) = |x+y|.$$

Pour chacune de ces applications, déterminer s'il s'agit d'une distance. Si oui, le prouver. Si non, dire pourquoi.

Exercice 3

Soit (X,d) un espace métrique. Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en $x \in X$ et de rayon r. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on désigne par $\tilde{B}(x,r)$ la boule fermée centrée en $x \in X$ de rayon r.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in X$, $B(x,r)$ est un ouvert.

b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in X$, $\tilde{B}(x,r)$ est un fermé. En déduire que les singletons sont fermés.

c) Si d est la métrique discrète sur X, comparer l'adhérence de $B(x,r)$ à $\tilde{B}(x,r)$ et l'intérieur de $\tilde{B}(x,r)$ à $B(x,r)$.

d) Toujours en supposant que d est la métrique discrète sur X, déterminer quelles sont les partie de X qui sont ouvertes dans (X,d). Même question pour les fermés.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que pour la distance associée à une norme $\|.\|$, l'adhérence de la boule ouverte $B(0,1)$ est la boule fermée $\tilde{B}(0,1)$.

Exercice 5

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa distance euclidienne. Déterminer les adhérences, les intérieurs et les frontières des parties suivantes :

$$A = \{(x,y)\ ;\ 2x \geq y\}, \quad B = \{(x,y)\ ;\ 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1\}, \quad C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \quad D = A \cap \mathbb{Q}^2.$$

Exercice 6

Soit (X,d) un espace métrique. Vrai/faux ?
a) Tout ouvert est une union de fermés. **b)** Tout fermé est une union d'ouverts.
c) Si $A \subset X$ est ouvert alors A n'est pas fermé. **d)** Si $A \subset X$ n'est pas ouvert alors A est fermé.

Exercice 7

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties disjointes de X. Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Est-ce encore le cas si on suppose A est fermé ?

Exercice 8

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X d'intérieur vide.

a) L'ensemble $A \cup B$ est-il encore d'intérieur vide ?

b) Même question en supposant A et B fermés.

c) Même question en supposant A et B ouverts.

Exercice 9

Soit (X,d) un espace métrique. Soit $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ pour $x,y \in X$.
a) Montrer que d' définit une métrique bornée sur X.
b) Est-ce que la métrique d' est équivalente à la métrique d ?
c) Montrer que les espaces métriques (X,d) et (X,d') ont les mêmes ouverts.

Exercice 10

Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à l'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k; k \geq n\}}$.

Exercice 11

Soit (X,d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Combien d'ensembles distincts peut-on créer au maximum à partir de A en utilisant les opérations adhérence et intérieur. Dit autrement, combien d'ensembles distincts y a-t-il au maximum dans la liste suivante :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}}, \dots$$

Donner un exemple de A qui maximise ce nombre (fini ou infini) quand $X = \mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit (X,d) un espace métrique et A un sous-ensemble non-vide de X. Pour $r > 0$, on note A_r l'ensemble défini par

$$A_r = \cup_{x\in A} \tilde{B}(x,r).$$

A-t-on $A = \cap_{r>0} A_r$? Si oui, le prouver. Si non, déterminer $\cap_{r>0} A_r$.

Exercice 1

Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $Y \subset X$, on définit $d(x,Y) := \inf_{y \in Y} d(x,y)$.
Soient Y_0 et Y_1 deux fermés non vides disjoints de X.

a) Montrer que pour $x,y \in X$ on a $|d(x,Y_0) - d(y,Y_0)| \leq d(x,y)$.

b) Montrer que la fonction $g\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x,Y_0)$ est continue et s'annule si et seulement $x \in Y_0$.

c) Utiliser la métrique d pour construire une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $f|_{Y_0} = 0$ et $f|_{Y_1} = 1$.

d) Soit Y un sous-ensemble quelconque de X. Déterminer l'ensemble des $x \in X$ tels que $d(x,Y) = 0$.

Exercice 2

Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Si $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme, montrer que si on pose

$$d(x,y) := d_Y(f(x), f(y)),$$

pour tout $x,y \in X$, alors d_X et d sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3

Soit (X,d_X) un espace métrique et soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une application. On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles

$$\{x \in X \,|\, f(x) < a\} \quad \text{et} \quad \{x \in X \,|\, f(x) > a\}$$

sont des ouverts de X.

Pour les deux exercices suivants, rappelons que si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont deux espaces métriques il y a plusieurs manières de mettre une distance sur le produit $X \times Y$. Dans le cours, trois exemples ont été donnés : si $z_1 = (x_1,y_1)$ et $z_2 = (x_2,y_2)$ sont deux points de $X \times Y$ alors

$$\delta_1(z_1,z_2) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2), \quad \delta_2(z_1,z_2) = (d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2)^{1/2}$$
$$\text{et} \quad \delta_\infty(z_1,z_2) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\},$$

définissent trois distances équivalentes sur $X \times Y$. Dans la suite on parlera de *distance produit* (ou *métrique produit*) sur $X \times Y$ pour l'une quelconque de ces trois distances.

Exercice 4

Soit (E,d) un espace métrique. On munit le produit $E \times E$ d'une métrique produit. Montrer que $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 5

Soient (X,d), (Y,d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. On pose $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$, L'espace produit $X \times Y$ est muni d'une métrique produit.

a) Soit l'application $\Psi_f\colon X \to \Gamma_f$ définie par $\Psi_f(x) = (x, f(x))$. On munit $\Gamma_f \subset X \times Y$ de la métrique induite. Montrer que f est continue si et seulement si Ψ_f est un homéomorphisme.

b) Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé dans $X \times Y$.

c) Donner un exemple d'application f qui n'est pas continue mais pour laquelle Γ_f soit une partie fermée de $X \times Y$.

Exercice 6

Soit (X,d), (Y,d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie B de Y on a $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B)$.

Exercice 7

Soit (X,d), (Y,d') des espaces métriques et f, g deux applications continues entre X et Y. Montrer que

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

Exercice 8

Soit $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'espaces métriques.

a) Montrer que pour $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b+c$, on a $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

b) Soit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$. Pour $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X, on pose $d(x,y) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x(n),y(n))}{1+d_n(x(n),y(n))}$.

Montrer que d définit bien une fonction de $X \times X$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que d est une métrique sur X.

d) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans (X,d) si et seulement si toutes les suites composantes $(x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent dans (X_n,d_n), $n \in \mathbb{N}^*$.

e) En déduire que les projections canoniques $\pi_n \colon (X,d) \to (X_n,d_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont continues.

Exercice 1

Considérons deux espaces métriques (X,d) et (Y,d') et une application $f\colon X \to Y$.

a) Si f est uniformément continue, montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy de X est une suite de Cauchy de Y. La réciproque est-elle vraie ?

b) Si f est bijective, uniformément continue et de réciproque continue, montrer que si Y est complet, alors X est aussi complet.

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un espace métrique (X,d). Les assertions suivantes sont-elle forcement équivalentes ? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

a) $\exists x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n,x) \leq \varepsilon$.

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n,x) \leq \varepsilon$.

Exercice 3

Soit $B = C([0,1])$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel les fonctions continues $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Pour $f,g \in B$, on définit

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \Big(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\ d_\infty(f,g) &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|. \end{aligned}$$

a) Montrer que d_2 définit une métrique sur B.

b) On considère la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de B définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}\,; \\ 1+\frac{n}{2}-nt & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\,; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans (B,d_2).

c) Est-ce que (f_n) est une suite de Cauchy dans (B,d_∞) ?

d) Est-ce que (B,d_2) est un espace métrique complet ?

Exercice 4

On note par ℓ^2 l'ensemble des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant $\sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty$.

a) Montrer que ℓ^2 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les opérations

$$\begin{aligned} (x_n)_n + (y_n)_n &:= (x_n+y_n)_n\,; \\ \lambda(x_n)_n &:= (\lambda x_n)_n \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

b) Pour $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ dans ℓ^2, on pose $d(x,y) = \big(\sum_{n\geq 1} |x_n-y_n|^2\big)^{1/2}$. Montrer que (ℓ^2,d) est un espace métrique.

c) Utiliser la complétude de $\mathbb{C}$ pour montrer que (ℓ^2,d) est un espace métrique complet.

Exercice 5

a) Soient E un espace métrique complet et $T\colon E \to E$ une application continue telle que T^p soit contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T possède un unique point fixe.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ une application continue non identique à 1. En considérant l'application

$$T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$$

donnée par

$$(Tf)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))dy \quad \forall x \in [0,1],$$

montrer qu'il existe une unique solution $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)) \; \forall x \in [0,1].$$

Exercice 1

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, montrer que la partie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a\}$ est compacte.

Exercice 2

Soit (X,d) un espace métrique compact.

a) Montrer que pour tout $r>0$ il existe un nombre fini $N \geq 1$ de points x_i, $1 \leq i \leq N$, tels que $X = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i,r)$.

b) On dit qu'un espace métrique est séparable s'il contient une partie dense au plus dénombrable. Déduire du point a) que X est séparable.

Exercice 3

a) Soit (X,d) un espace métrique, $F \subset X$ un fermé et $K \subset X$ un compact. Montrer que si $F \cap K = \varnothing$ alors $d(F,K) > 0$.

b) Donner un exemple de deux fermés F_1, F_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $d(F_1,F_2) = 0$.

Exercice 4

Soit (X,d) un espace métrique compact et $f\colon X \to X$ une application vérifiant $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) \leq d(f(x),f(y))$.

a) Montrer que f est injective.

b) On note $f^n := f \circ \cdots \circ f$, la n-ième itérée de f. Vérifier que $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) \leq d(f^n(x),f^n(y))$.

c) Soit $(x,y) \in X^2$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f^n(x),f^n(y))_{n\geq 0}$ qui converge, c-à-d qu'il existe une fonction strictement croissante $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f^{\phi(n)}(x),f^{\phi(n)}(y))_{n\geq 0}$ converge.

d) On pose, pour $n \geq 0$, $\psi(n) := \phi(n+1) - \phi(n)$. Montrer que $(f^{\psi(n)}(x))_{n\geq 0}$ converge vers x et que $(f^{\psi(n)}(y))_{n\geq 0}$ converge vers y.

e) En déduire que
- — f est une isométrie, c'est-à-dire : $\quad \forall (x,y) \in X^2 \quad d(x,y) = d(f(x),f(y))$;
- — f est continue ;
- — f est bijective.

Exercice 5

Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Rappelons que $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ équipé de l'addition et la multiplication standard des fonctions forme un anneau commutatif, c-à-d l'addition en fait un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition, associative, commutatif et possède un élément neutre : la fonction constante égale à 1. Enfin, un idéal I de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ est un sous-ensemble tel que

$$\begin{array}{ll} \forall (f,g) \in I^2 & f+g \in I, \\ \forall f \in I,\ g \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R}) & fg \in I. \end{array}$$

a) Déterminer les éléments inversibles de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, c-à-d $f \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel qu'il existe $g \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, $fg = 1$.

b) Soit $x \in X$. Montrer que $I_x := \{f \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.

c) Soit I un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel que $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$. Montrer que I ne peut pas contenir d'éléments inversibles.

d) Soit I un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel que $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que pour tout $f \in I$, $f(x) = 0$.

e) Caractériser les idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, c-à-d les idéaux $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tels que si I est contenu dans un idéal J alors $J = I$ ou $J = \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.

Exercice 1

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit la sphère unité $S := \{x \in E\colon \|x\| = 1\}$.

a) Si $x, y \in S$ et $y \neq -x$, montrer que

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}, \quad t \in [0,1],$$

définit une application continue de $[0,1]$ dans S vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

b) En déduire que, si $\dim(E) \geq 2$, alors S est connexe par arcs.

Exercice 2

Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques. On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *localement constante* si $\forall x \in E$ il existe un voisinage de x sur lequel f soit constante.

a) Montrer qu'une application localement constante $f\colon E \to F$ est continue.

b) Donner un exemple d'une application localement constante qui ne soit pas constante.

c) Si E est connexe, montrer que toute application localement constante $f\colon E \to F$ est constante.

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $D^+ = \{(x,y) \in I^2\colon y > x\}$.

a) Montrer que D^+ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. En utilisant la fonction $F\colon I^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x) - f(y)$, montrer que f est strictement monotone.

Exercice 4

a) (Théorème du passage des douanes) Soit (X,d) un espace métrique. Soit A une partie de X. La frontière de A est notée ∂A. Montrer que si $C \subset X$ est connexe et que

$$\mathring{A} \cap C \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \widehat{A^c}^{\circ} \cap C \neq \varnothing,$$

alors C rencontre ∂A.

b) En déduire qu'une fonction $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue admet un point fixe. (Il est aussi possible de le montrer par le théorème des valeurs intermédiaires.)

Exercice 5

Rappelons que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{S}^1$ est connexe.

b) En déduire que si $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.

c) En déduire que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n := \{(x, nx)\ :\ x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

a) Est-ce que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$?

b) Est-ce que $\overline{A}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$?

c) Déterminer les composantes connexes de A.