Correction du devoir sur Baire

Partie I : le théorème de Baire.

Remarque : Rappelons que Y est dense dans X si et seulement si Y intersecte tout ouvert non-vide de X.

1) D'après la remarque ci-dessus, Ω_1 intersecte U, c-à-d qu'il existe $x_1 \in \Omega_1 \cap U$. Or, U et Ω_1 étant ouverts, l'intersection l'est aussi donc il existe $r > 0$ tel que $B(x_1, r) \subset \Omega_1 \cap U$. Donc si on pose $r_1 := r/3$ alors

$$\overline{B(x_1, 2r_1)} \subset B(x_1, 3r_1) = B(x_1, r) \subset \Omega_1 \cap U.$$

2) On construit la suite par récurrence. Le cas $n = 1$ a été fait dans la question **1)**. Supposons que la construction ait été faite jusqu'au rang n avec $n \geq 1$. Puisque $B(x_n, r_n)$ est un ouvert non-vide et que Ω_{n+1} est un ouvert dense, il existe $x_{n+1} \in \Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme ci-dessus, $\Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est un ouvert donc il existe $r' > 0$ tel que $B(x_{n+1}, r') \subset \Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. En posant $r_{n+1} := r'/3$ on obtient

$$\overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset B(x_{n+1}, 3r_{n+1}) = B(x_{n+1}, r') \subset \Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n).$$

En particulier, $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \Omega_{n+1}$ et $\overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$. La construction est donc satisfaite au rang $n + 1$ et donc par récurrence, pour tout $n \geq 1$.

3) Puisque $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$. Les fermés $(\overline{B(x_n, r_n)})_{n\geq 1}$ sont donc emboîtés. De plus l'inclusion $\overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$ implique que $2r_{n+1} \leq r_n$ et donc que le diamètre de $\overline{B(x_n, r_n)}$ tend vers 0. Puisque X est complet, le théorème des fermés emboîtés implique qu'il existe $x \in X$ tel que $\cap_{n\geq 1}\overline{B(x_n, r_n)} = \{x\}$. Donc pour tout $n \geq 1$, x appartient à $\overline{B(x_n, r_n)} \subset \Omega_n$ donc $x \in \Omega := \cap_{n\geq 1}\Omega_n$. De plus, $x \in B(x_1, 2r_1) \subset U$ donc x appartient aussi à U. On en conclut que Ω intersecte U.

Remarque : Un argument dans la preuve du point **3)** n'est en fait pas correct. En effet, en général $\overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}$ n'implique pas que $2r_{n+1} \leq r_n$. Il suffit de prendre X réduit à un point et tous les r_n égaux à 1. En revanche, on peut rajouter la condition $2r_{n+1} \leq r_n$ dans la construction faite à la question **2)**.

4) Puisqu'on vient de montrer que Ω intersecte tout ouvert non-vide de X, le fait que Ω soit dense vient simplement de la première remarque ci-dessus.

Partie II

1) Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Or f est bijective d'inverse g donc $x = g(y)$. Puisque $x \in A$ on obtient que $g(y) \in A$, c-à-d $y \in g^{-1}(A)$. Inversement, si $y \in g^{-1}(A)$ alors $g(y) \in A$. Or $f(g(y)) = y$ donc $y \in f(A)$.

2) Soit A un fermé de X. Puisque X est compact, A l'est aussi. Or f est une application continue donc $f(A)$ est aussi compact et donc en particulier fermé dans Y. D'après **1)**, on en déduit que $g^{-1}(A)$ est un fermé de Y.

3) On vient de montrer que l'image réciproque par g d'un fermé de X est un fermé de Y. L'application g est donc continue. Puisqu'on savait déjà que f était continue et bijective, on en conclut que f est un homéomorphisme.

Partie III

1) Puisque A est d'intérieur non-vide, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, 2r_0) \subset A$ et donc $\overline{B(x_0, r_0)} \subset A$. Pour simplifier, on pose $B = \overline{B(x_0, r_0)}$. Puisque h est continue, $h^{-1}(B)$ est un fermé de I. Puisque h^{-1} est continue, le fait que B soit un connexe (car on est dans $\mathbb{R}^2$, il est même convexe) implique que $h^{-1}(B)$ est un connexe de I. On en conclut que $h^{-1}(B)$ est un interval fermé inclus dans I qui n'est pas réduit à un point (car B ne l'est pas). Il existe donc $0 \leq a < b \leq 1$ tels que $h^{-1}(B) = [a, b]$. La restriction de h à $[a, b]$ est donc un homéomorphisme entre $[a, b]$ et B.

2) Soit $c \in]a, b[$. L'ensemble $[a, b] \setminus \{c\}$ n'est pas connexe mais l'ensemble $B \setminus \{h(c)\}$ l'est. Or la restriction de h à $[a, b] \setminus \{c\}$ est un homéomorphisme entre $[a, b] \setminus \{c\}$ et $B \setminus \{h(c)\}$, ce qui est une contradiction.

Partie IV

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est continue et injective, sa restriction g à $[n, n+1]$ est une bijection continue entre $[n, n+1]$ et $f([n, n+1])$. Or $[n, n+1]$ est compact donc d'après la **Partie II**, g est un homéomorphisme.

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'application $x \mapsto x + n$ est un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et $[n, n+1]$ donc $h(x) := f(x + n)$ est un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et $f([n, n+1])$. Or d'après la **Partie III**, il n'y a pas d'homéomorphisme entre $[0, 1]$ et un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non-vide. Donc $f([n, n+1])$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$.

3) En passant au complémentaire, le théorème de Baire dit que dans un espace complet X, si $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de fermés d'intérieur vide alors $\cup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ est encore d'intérieur vide. En particulier, $X \neq \cup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. En appliquant ce résultat avec $X = \mathbb{R}^2$ et $F_n = f([n, n+1])$ on obtient que $\mathbb{R}^2 \neq \cup_{n\in\mathbb{Z}} F_n = f(\mathbb{R})$, donc f n'est pas sujective.

Remarque : Certains points n'ont pas totalement été détaillés ici. C'est le cas de la toute première remarque, du fait (utilisé dans la **Partie III**) que si $h\colon X \to Y$ est un homéomorphisme et que $A \subset X$ alors la restriction de h à A est un homéomorphisme entre A et $h(A)$, ou encore du fait (**Partie III 2)**) que $B \setminus \{h(c)\}$ est connexe.