Université de Bourgogne Année 2017-2018
Licence 3 Décembre

Devoir de topologie : Autour du théorème de Baire

Le but de ce devoir est d'étudier les différences topologiques entre certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$. Un des résultats reposera sur le théorème de Baire. On commencera donc par démontrer ce théorème (qui possède de nombreuses autres applications).

Partie I : le théorème de Baire.

Théorème 1 *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ une famille d'ouverts denses de X. Alors l'ensemble $\Omega := \cap_{n\geq 1}\Omega_n$ est dense dans X.*

Pour montrer ce théorème, on fixe un ouvert U non-vide de X.
1) Expliquer pourquoi il existe $x_1 \in \Omega_1$ et $r_1 > 0$ tel que $\overline{B(x_1, 2r_1)} \subset U \cap \Omega_1$.
2) De la même manière, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ dans X et une suite $(r_n)_{n\geq 2}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $n \geq 1$

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \Omega_{n+1}, \quad \text{et} \quad \overline{B(x_{n+1}, 2r_{n+1})} \subset \overline{B(x_n, r_n)}.$$

3) En déduire que $\Omega \cap U \neq \varnothing$.
4) Conclure.

Partie II : applications bijectives continues partant d'un compact.
Dans cette partie, on considère deux espaces métriques X et Y et une application continue $f: X \to Y$. On suppose de plus que X est compact et que f est bijective et on note $g: Y \to X$ son inverse.
1) Soit $A \subset X$. Il est classique de définir

$$f(A) := \{y \in Y \text{ ; il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\} \quad \text{et} \quad g^{-1}(A) := \{y \in Y \text{ ; } g(y) \in A\}.$$

Montrer qu'il n'y a pas de conflit de notation, c'est-à-dire que $f(A) = g^{-1}(A)$.
2) Montrer que si A est un fermé de X alors $g^{-1}(A)$ est un fermé de Y.
3) En déduire que f est un homéomorphisme.

Partie III : homéomorphismes entre parties de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.
Soit $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble d'intérieur non-vide. Supposons qu'il existe un homéomorphisme h entre I et A.
1) Montrer qu'il existe $0 \leq a < b \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ tels que la restriction de h à $[a, b]$ est un homéomorphisme entre $[a, b]$ et $\overline{B(x_0, r)}$.
2) En déduire une contradiction. *Indication : on pourra essayer d'enlever un point de chaque côté puis d'utiliser un argument reposant sur la connexité.*

Partie IV : non-existence de bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application continue et injective.
1) En utilisant la Partie II, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de f à $[n, n + 1]$ est un homéomorphisme entre $[n, n + 1]$ et $f([n, n + 1])$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f([n, n + 1])$ est un fermé d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$.
3) En utilisant le théorème de Baire, montrer que f ne peut pas être surjective. *Indication : on pourra passer au complémentaire dans l'énoncé du théorème de Baire.*