Université de Bourgogne Année 2020-2021

Structures fondamentales 1er octobre

Partiel

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in G$ un élément d'ordre n.
1) Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $x^k = e$ alors n divise k.
2) Quel est l'ordre de x^2 ? *Indication : on pourra faire des disjonctions de cas en fonction des propriétés de n.*

Exercice 2.
Dans cet exercice, on suppose que G est abélien. Soit $x, y \in G$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(xy)^n = x^n y^n$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux et on suppose que x est d'ordre p et y est d'ordre q.
2) Déterminer l'ordre de x^q et l'ordre de $(xy)^q$.
3) En déduire l'ordre de xy.

Exercice 3.
Soit H un sous-groupe de G. Pour tout a dans G on pose $aH := \{ab \,|\, b \in H\}$. Soit $x, y \in G$. Montrer que si $xH \cap yH \neq \varnothing$ alors $xH = yH$.

Exercice 4.
Soit H un sous-groupe de G. On suppose que $H \neq G$. Déterminer le sous-groupe engendré par $G \setminus H$.

Exercice 5.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Montrer que

$$H := \{a^n \,|\, n \in [\![0; k-1]\!]\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 6.
Soit H et F deux sous-groupes de G. On note $HF = \{ab \,|\, a \in H,\ b \in F\}$. Montrer que HF est un sous-groupe si et seulement si $HF = FH$ (où $FH = \{ba \,|\, a \in H,\ b \in F\}$).