Dans la suite, G et G' désigneront deux groupes dont les lois sont notées multiplicativement et dont les éléments neutres sont respectivement e et e'.

Exercice 1 Soit h un élément de G. Pour chacune des applications allant de G dans G suivantes, dire lesquelles sont des morphismes de groupes et lesquelles sont des automorphismes.

a) $x \mapsto hx$.

b) $x \mapsto xh^{-1}$.

c) $x \mapsto hxh^{-1}$.

Exercice 2 Pour chacune des applications suivantes, dire lesquelles sont des morphismes de groupes et lesquelles sont des isomorphismes.

a) $f_1\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$ définie par $f_1(x) = x^2$.

b) $f_2\colon (\mathbb{R}^*,\times) \to (\mathbb{R}^*,\times)$ définie par $f_2(x) = x^2$.

c) $f_3\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*,\times)$ définie par $f_3(x) = e^x$.

d) $f_4\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*_+,\times)$ définie par $f_4(x) = e^x$.

e) $f_5\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C}^*,\times)$ définie par $f_5(x) = e^{2i\pi x}$.

f) $f_6\colon (\mathbb{C}^*,\times) \to (\mathbb{R}^*,\times)$ définie par $f_6(x) = |x|$.

g) Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. On note Tr et Det les applications de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$ vers $(\mathbb{R},+)$ définies par

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d \quad \text{et} \quad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc.$$

h) Même question que ci-dessus mais où les applications sont vu de $(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}),\times)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$, où $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupe. Si $x \in G$ est d'ordre p, que peut-on dire de l'ordre de $f(x)$? Est-il d'ordre p ? D'ordre inférieur ou égal à p ? Peut-il ne pas être d'ordre fini ?

Exercice 4 Pour chaque paire de groupes suivants, déterminer tous les morphismes de groupes allant du 1er vers le 2ème puis du 2ème vers le 1er.

a) $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$.

b) $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$.

c) $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ où $n \geq 2$ est un entier.

d) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$.

e) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

Exercice 5 Pour les applications de l'exercice 2 qui sont des morphismes de groupes, déterminer leur noyau et leur image.

Exercice 6 Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$?

Exercice 7 Rappelons que $\mathrm{Aut}(G)$ désigne l'ensemble des automorphismes de groupes de G. $\mathrm{Aut}(G)$ muni de la loi de composition est un groupe.
Si h est un élément de G, on note τ_h l'application de G dans G définie par $\tau_h(x) = hxh^{-1}$. Montrer que l'application ϕ de G vers $\mathrm{Aut}(G)$ définie par $\phi(h) = \tau_h$ est un morphisme de groupes.