Dans la suite, G désignera un groupe dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e.

Exercice 1 Soit x et y deux éléments de G. On suppose que le produit xy est d'ordre fini. Montrer que yx est aussi d'ordre fini, du même ordre que xy.

Exercice 2 Soit G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

a) Montrer que si $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G alors $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

b) Supposons que G_1 et G_2 soient finis et d'ordres premiers entre eux. Que peut-on dire de $G_1 \cap G_2$?

Exercice 3 Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Z}$. Montrer que le sous-groupe $< A >$ engendré par A est égal à $k\mathbb{Z}$ où k est le plus grand entier qui divise tous les éléments de A.

Exercice 4 Faire la liste de tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 5 Soit G un groupe fini d'ordre impaire.

a) Montrer que e est l'unique solution dans G à l'équation $x^2 = e$.

b) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

c) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^2$ est-elle un morphisme ? Est-elle bijective ?

Exercice 6 Soit G un groupe fini et soit n un entier premier avec l'ordre de G. Montrer que pour tout a dans G, l'équation $x^n = a$ a une unique solution dans G.

Exercice 7 Soit G un groupe tel que pour tout x dans G, $x^2 = e$.

a) Montrer que G est abélien.

b*) Montrer que si G est fini alors son ordre est une puissance de 2.

Exercice 8

a) Soit $a \in G$. On définit l'ensemble C_a par $C_a := \{x \in G \,|\, ax = xa\}$. Montrer que C_a est un sous-groupe de G.

b) L'ensemble $Z := \{x \in G \,|\, \forall y \in G \;\; yx = xy\}$ est-il un sous-groupe de G ?