Université de Bourgogne Année 2019-2020
Structures fondamentales 20 décembre

Contrôle terminal – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.
Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Soit $f\colon G \to G$ un morphisme de groupes.
1) Soit $a \in G$. En partant des définitions rappelées en page 2, montrer les assertions suivantes.
a) $f(e) = e$. **b)** $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. **c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a^n) = f(a)^n$.
d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(a^n) = f(a)^n$.
2) On rappelle que le *noyau* de f est $\ker(f) := \{x \in G \mid f(x) = e\}$.
a) Montrer que $\ker(f)$ est un sous-groupe de G.
b) Donner une propriété nécessaire et suffisante sur $\ker(f)$ pour que f soit injective. Et montrer cette équivalence.
3) Soit $a \in G$ un élément d'ordre fini dont on note k l'ordre.
a) Montrer que $f(a)$ est d'ordre fini.
b) Soit r l'ordre de $f(a)$. Pour chacune des deux assertions suivantes, determiner si elle est toujours vraie. Si c'est le cas, donnez-en une preuve et sinon, donnez-en un contre-exemple.

i) $r \leq k$ **ii)** $k \leq r$.

Exercice 2.
Soit H un sous-groupe de G. Pour tout a dans G on pose $aH := \{ab \mid b \in H\}$. Soit $x, y \in G$. Montrer que si $xH \cap yH \neq \varnothing$ alors $xH = yH$.

Exercice 3.
Rappelons que si $n \in \mathbb{Z}$ alors $n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ en justifiant bien la réponse. Ici le produit dans $\mathbb{Z}$ est le produit standard entre entiers.

Exercice 4.
a) Soit $a \in G$. On définit l'ensemble C_a par $C_a := \{x \in G \mid ax = xa\}$. Montrer que C_a est un sous-groupe de G.
b) L'ensemble $Z := \{x \in G \mid \forall y \in G \ \ yx = xy\}$ est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 5.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Montrer que

$$H := \{a^n \mid n \in [\![0; k-1]\!]\}$$

est un sous-groupe de G.

Rappels de cours

Définition.
On appelle *groupe* un ensemble G muni d'une loi $*\colon G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto a * b$ telle que

- **i)** la loi $*$ est *associative* c-à-d pour tout a, b, c dans G, $(a*b)*c = a*(b*c)$,
- **ii)** il existe un *élément neutre* $e \in G$ pour $*$ c-à-d pour tout a dans G, $a*e = e*a = a$,
- **iii)** tout élément de G possède un *inverse* c-à-d pour tout a dans G, il existe b dans G tel que $a*b = b*a = e$.

On parle alors du groupe $(G,*)$ ou simplement G s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi.
Dans cet examen, on écrira ab à la place de $a*b$ et l'inverse de a sera noté a^{-1}.

Définition.
Soit $a \in G$. Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'élément a^n de G en suivant les règles suivantes :
– $a^0 = e$,
– si $n \geq 0$ alors $a^{n+1} = a(a^n)$,
– si $n < 0$ alors $a^n = (a^{|n|})^{-1}$.

Définition.
Une application $f\colon G \to G$ est un *morphisme de groupes* si pour tout $x, y \in G$, $f(xy) = f(x)f(y)$.