Correction du partiel de structures fondamentales

Rappelons que G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1

1) Soit $x \in G$ tel que $x^2 = x$. En multipliant par x^{-1} (disons par la gauche) de chaque côté, on obtient

$$x^{-1}(x^2) = x^{-1}x \quad \text{et donc} \quad x = e.$$

2) Cette assertion est fausse. Pour le voir considérons le cas où $G = \mathbb{R}^*$ muni de la loi multiplicative standard. On a alors que $e = 1$ mais $-1 \neq e$ vérifie $(-1)^2 = 1$.

3) Comme ci-dessus, l'assertion est fausse. Dans ce cas, un contre-exemple possible (parmi bien d'autres) est $G = \mathbb{C}^*$ muni de la loi multiplicative standard et $x = e^{2i\pi/3}$. On a bien $x \neq 1$ mais $x^3 = 1$.

4) Si x est un élément de G tel que $x^2 = e$ alors en multipliant chaque côté par x^{-1} on obtient $x = x^{-1}$.

5) Soit $x \in G$. En posant $y = x^2$ (qui est, si on veut le préciser, bien un élément de G car G est stable par sa loi), on a bien $y = x^2$.

6) À l'inverse, cette assertion est fausse (il n'y a pas de "racine carrée" en général dans un groupe). Là encore, il suffit de considérer le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $x = -1$. En effet, si $y \in \mathbb{R}^*$ alors y^2 est positif et ne peut donc pas être égal à -1.

7&8) L'assertion 8) implique la 7) or la 8) est vraie (donc la 7) aussi). Pour le voir, il suffit de poser $x = e$ et on a bien que pour tout $y \in G$, $ye = ey$.

9) Soit $x, y \in G$. Posons, $z = yx^{-1}$. Cet élément de G vérifie alors bien $zx = yx^{-1}x = y$.

10) Soit $x, y \in G$ tels que $(xy)^2 = x^2y^2$. En multipliant chaque terme par x^{-1} à gauche et y^{-1} à droite on obtient

$$x^{-1}xyxyy^{-1} = x^{-1}xxyyy^{-1} \quad \text{et donc} \quad yx = xy.$$

On vient de montrer que $(xy)^2 = x^2y^2$ implique que x et y commutent. Donc l'assertion 10) ne peut pas être vraie pour un groupe non-abélien, par exemple pour $G = S_3$.

Exercice 2

Soit $x, y \in G$ tels que $xH \cap yH \neq \varnothing$. Il existe donc un élément z dans cet intersection. Par définition de xH et yH, il existe $b \in H$ et $b' \in H$ tels que $z = xb = yb'$. On en déduit que $x = yb'b^{-1}$. Choisissons maintenant un élément a de xH. Toujours par définition de xH, il existe $c \in H$ tel que $a = xc$. En utilisant l'égalité précédente, on obtient $a = yb'b^{-1}c$. Or, H est un sous-groupe de G et $b, b', c \in H$ donc $b'b^{-1}c$ est aussi dans H. Donc $a = yb'b^{-1}c$ appartient à yH. Puisque a était arbitraire dans xH, ceci montre que $xH \subset yH$. En inversant les rôles de x et y dans le raisonnement ci-dessus, on obtient aussi que $yH \subset xH$ et donc $xH = yH$.

Exercice 3

Rappelons que $k \in \mathbb{N}^*$ et que a est un élément d'ordre k de G. L'objectif est de montrer que

$$H := \{a^n \mid n \in [\![0; k-1]\!]\}$$

est un sous-groupe de G. Déjà, observons que $0 \in [\![0;k-1]\!]$ (puisque $k \geq 1$) donc $a^0 \in H$ et H n'est pas vide. Maintenant, fixons $x, y \in H$. Par définition de H, il existe $n, m \in [\![0;k-1]\!]$ tels que $x = a^n$ et $y = a^m$. Donc $xy = (a^n)(a^m) = a^{n+m}$. Par division euclidienne, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0;k-1]\!]$ tels que $n + m = qk + r$ (il est facile de voir que $q = 0$ si $n + m < k$ et $q = 1$ sinon) ce qui implique que

$$xy = a^{n+m} = a^{qk+r} = (a^k)^q a^r = e^q a^r = a^r,$$

où la quatrième égalité vient du fait que a est d'ordre k. On a donc que $xy = a^r$ avec $r \in [\![0;k-1]\!]$ donc $xy \in H$. De la même manière, $x^{-1} = a^{-n}$ et il existe $q' \in \mathbb{Z}$, $r' \in [\![0;k-1]\!]$ tels que $-n = q'k + r'$ et donc $x^{-1} = a^{q'k+r'} = a^{r'}$, c-à-d $x^{-1} \in H$. Tout ceci montre que H est bien un sous-groupe de G.

Exercice 4

1) Cela a déjà été vu en cours.

2) On note k le cardinal de $H_1 \cap H_2$. D'après 1), $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G donc $e \in H_1 \cap H_2$ et donc $k \geq 1$. Par ailleurs, $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de H_1 donc par le théorème de Lagrange, k divise le cardinal de H_1 c-à-d k divise 5. De la même manière, k divise le cardinal de H_2 donc k divise 9. Or, le PGCD de 5 et 9 est 1 donc $k = 1$ et le seul élément de $H_1 \cap H_2$ est e, c-à-d $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.