Université de Bourgogne Année 2019-2020
Structures fondamentales 18 novembre

Partiel

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont toujours vraies. Pour chacune des autres, donner un exemple de groupe G et d'éléments de G qui ne vérifient pas l'assertion.
1) Si $x \in G$ vérifie $x^2 = x$ alors $x = e$.
2) Si $x \in G$ vérifie $x^2 = e$ alors $x = e$.
3) Si $x \in G$ vérifie $x^3 = e$ alors $x = e$.
4) Si $x \in G$ vérifie $x^2 = e$ alors x est égale à son inverse.
5) Pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y = x^2$.
6) Pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $x = y^2$.
7) Pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $xy = yx$.
8) Il existe $x \in G$ tel que pour tout $y \in G$ $xy = yx$.
9) Pour tout $x, y \in G$ il existe $z \in G$ tel que $y = zx$.
10) Pour tout $x, y \in G$ $(xy)^2 = x^2y^2$.

Exercice 2.
Soit H un sous-groupe de G. Pour tout a dans G on pose $aH := \{ab \,|\, b \in H\}$. Soit $x, y \in G$. Montrer que si $xH \cap yH \neq \varnothing$ alors $xH = yH$.

Exercice 3.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Montrer que

$$H := \{a^n \,|\, n \in [\![0; k-1]\!]\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 4.
1) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.
2) Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. Supposons qu'ils sont deux les deux finis et que le cardinal de H_1 est 5 et celui de H_2 est 9. Déterminer $H_1 \cap H_2$.