Dans la suite, G désignera un groupe dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e.

Exercice 1 Soit x et y deux éléments de G. On suppose que le produit xy est d'ordre fini. Montrer que yx est aussi d'ordre fini, du même ordre que xy.

Exercice 2 Soit G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

a) Montrer que si $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G alors $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

b) Supposons que G_1 et G_2 soient finis et d'ordres premiers entre eux. Que peut-on dire de $G_1 \cap G_2$?

Exercice 3 On suppose ici que le groupe G a 6 éléments, notés a, b, c, d, e, f. Dans le tableau ci-dessous représente la loi $*$ du groupe. Par exemple, la case de la ligne f et de la colonne a correspond au produit $f * a$ et est égale à b. Pouvez-vous compléter ce tableau afin que $(G, *)$ soit bien un groupe ? Quel est l'élément neutre ? Ce groupe est-il abélien ? Quel est l'ordre des éléments ?

*	a	b	c	d	e	f
a		d				c
b	f		d	c		
c	d					
d		a		f	d	e
e						
f	b		a			

Exercice 4 Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{Z}$. Montrer que le sous-groupe $< A >$ engendré par A est égal à $k\mathbb{Z}$ où k est le plus grand entier qui divise tous les éléments de A.

Exercice 5 Faire la liste de tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 6

a) L'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels et de déterminant non-nul est-il un groupe (si muni de la multiplication matriciel) ?

b) L'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients entiers et de déterminant non-nul est-il un groupe ?

c) L'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients rationnels et de déterminant non-nul est-il un groupe ?

Exercice 7 Soit G un groupe fini d'ordre impaire.

a) Montrer que e est l'unique solution dans G à l'équation $x^2 = e$.

b) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

c) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^2$ est-elle un homomorphisme ? Est-elle bijective ?

Exercice 8 Soit G un groupe fini et soit n un entier premier avec l'ordre de G. Montrer que pour tout a dans G, l'équation $x^n = a$ a une unique solution dans G.

Exercice 9 Soit G un groupe tel que pour tout x dans G, $x^2 = e$.

a) Montrer que G est abélien.

b*) Montrer que si G est fini alors son ordre est une puissance de 2.