Dans la suite, $(G,*)$ désignera un groupe dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e.

Exercice 1 Soit $a \in G$. Montrer que l'inverse de a est unique.

Exercice 2 Parmi les couples ensemble-loi suivants, dire lesquels forment un groupe. Pour ceux qui ne le sont pas, être-t-il possible de "réparer" la situation, en enlevant quelques éléments à l'ensemble par exemple.

a) $(\mathbb{N},+)$, **b)** $(\mathbb{Z},+)$, **c)** $(\mathbb{Z},\times)$, **d)** $(\mathbb{R},+)$, **e)** $(\mathbb{R},\times)$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ un entier. Rappelons que S_n désigne le groupe symétrique de l'ensemble à n éléments (dit autrement, S_n est l'ensemble des bijections de $\{1,\cdots,n\}$ dans lui-même).

a) Lister tous les éléments de S_1, S_2 et S_3. Combien y en a-t-il ?

b) Vérifier que, muni de la loi de composition, S_3 est un groupe et identifier son élément neutre (qu'on notera e pour la suite).

c) Pour chaque $\sigma \in S_3$, trouver le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\sigma^k = e$.

Exercice 4 Soit G un groupe. Pour chacun des énoncés suivants, donnez une preuve de ceux qui sont vrais et donnez un contre exemple à ceux qui sont faux.

a) Si $x^2 = e$ alors $x = e$.

b) Si $x^2 = a^2$ alors $x = a$.

c) Si $x^2 = x$ alors $x = e$.

d) Pour tout $x, y \in G$, $(xy)^2 = x^2y^2$.

e) Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x = y^2$.

f) Pour tout $x, y \in G$ il existe $z \in G$ tel que $y = xz$.

Exercice 5

a) Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ alors $k\mathbb{Z} := \{kn \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

b) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de cette forme la.