Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année universitaire 2017–2018
Département de Mathématiques

L3 — Topologie des espaces métriques
Épreuve partielle du 7 novembre 2017 — Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Justifier vos affirmations.
Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Exercice 1.

1a. Justifier que $A :=]-2,-1[\, \cup\,]1,2[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle.

1b. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre 2 ensembles. Soient A et B des parties de Y. Est-ce que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$? Si oui, le montrer ; si non, donner un contre-exemple.

Exercice 2. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un ensemble dénombrable.

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique. Soit $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ pour $x,y \in X$.

3a. Étudier la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ pour $t \geq 0$ pour établir que si $0 \leq a \leq b+c$, alors $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

3b. Montrer que d' définit une métrique bornée sur X.

3c. En général, est-ce que la métrique d' est équivalente à la métrique d ?

3d. Montrer que les métriques d et d' sont topologiquement équivalentes.

3e. Donner un exemple d'espace métrique (X,d) tel que d et d' soient équivalentes.

3f. Donner un exemple d'espace métrique (X,d) tel que d et d' ne soient pas équivalentes.

Exercice 4. On consière $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle. Soient les parties de $\mathbb{R}$:

$$A = \{\frac{1}{2n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$$

4a. Déterminer les adhérences $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

4b. Déterminer les intérieurs $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$.

4c. Déterminer les frontières ∂A et ∂B.

4d. Si $\mathbb{R}$ est muni de la métrique discrète, déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de A.

Exercice 5. Soient (E,d) et (F,d') des espaces métriques et $f\colon E \to F$ une application.

5a. Montrer que si f est continue, alors $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ pour toute partie $B \subset F$.

5b. Si pour toute partie $B \subset F$ on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$, montrer que f est continue.

5c. Pour $E = F = \mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle, donner un exemple de fonction continue et d'une partie $B \subset \mathbb{R}$ telles que $\overline{f^{-1}(B)} \neq f^{-1}(\overline{B})$.