Université de Bourgogne Année 2018-2019
Licence 3 Novembre

Correction du partiel

Exercice 1.
1) Rappelons que $A \subset E$ est un ouvert de E si pour tout $x \in A$ il existe $r > 0$ tel que

$$B(x,r) := \{y \in E \mid d(x,y) < r\} \subset A.$$

Toutes les assertions commençant par "pour tout $x \in A$" sont vraies quand A est l'ensemble vide (car il n'y a pas de $x \in A$ pour lequel il faille vérifier la condition) donc en particulier, l'ensemble vide est un ouvert de E.
D'un autre côté, remarquons que d'après sa définition $B(x,r)$ est incluse dans E. Donc pour tout $x \in E$, $B(x,1) \subset E$ et E est bien un ouvert dans lui-même.

2) Rappelons que $A \subset E$ est un fermé de E si $E \setminus A$ est un ouvert de E. On vient de voir que $\varnothing$ est ouvert dans E donc $E = E \setminus \varnothing$ est fermé dans E. De même, E est ouvert dans E donc $\varnothing = E \setminus E$ est un fermé de E.

3) Toutes ces inclusions sont vraies. En effet, pour obtenir **a)** remarquons que $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$. Cela implique que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Une réunion de deux fermés est fermé donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$ donc il contient $\overline{A \cup B}$. Inversement, $A \subset A \cup B$ donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. En combinant les deux, on obtient $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, ce qui donne **b)**.
Pour obtenir **c)** et **d)**, il suffit de passer au complémentaire. Si on pose $C := A^{\complement}$ et $D := B^{\complement}$ alors le complémentaire de $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ est $\overline{C \cup D}$ et celui de $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est $\overline{C} \cup \overline{D}$. D'après **a)** et **b)**, $\overline{C \cup D} = \overline{C} \cup \overline{D}$ et donc $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Exercice 2.
1)a) $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ car $0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $0 < r < 1$, $B(0,r) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$.
b) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{Z}$ qui converge dans $\mathbb{R}$. En particulier, cette suite est de Cauchy et il existe $N > 1$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| < 1/2$. Or, deux entiers k, l tels que $|k - l| < 1/2$ doivent être égaux. On en déduit que pour tout $p \geq N$, $x_p = x_N$ et donc que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $x_N \in \mathbb{Z}$. Cela montre que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
2) Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ qui contiennent $[0,1]$. Par définition,

$$A = \cap_{X \in \mathcal{U}} X.$$

$\mathcal{U}$ est non-vide car $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $[0,1]$. Si $X \in \mathcal{U}$ alors $[0,1] \subset X$ et donc $[0,1] \subset \cap_{X \in \mathcal{U}} X = A$. De plus si $x > 1$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $x > 1 + \epsilon$ et donc $x \notin]-\epsilon, 1+\epsilon[$. Or, $]-\epsilon, 1+\epsilon[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$ donc $A \subset]-\epsilon, 1+\epsilon[$ et $x \notin A$. De même, si $x < 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $x < -\epsilon$ et donc $x \notin]-\epsilon, 1+\epsilon[$. On conclut comme ci-dessus que $x \notin A$. Tout cela montre que $A = [0,1]$.
3) $\{0\}$ n'est pas un ouvert de X car si $r > 0$ il existe $N > 0$ tel que $1/N < r$ et donc $1/N \in B(0,r) \cap X$.
Inversement, fixons $n_0 \geq 1$. La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ est décroissante et donc les points les plus proches de $1/n_0$ dans $X \setminus \{1/n_0\}$ sont $1/(n_0+1)$ et $1/(n_0-1)$ (si $n_0 \neq 1$). De plus

$$\left|\frac{1}{n_0 - 1} - \frac{1}{n_0}\right| \geq \left|\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}\right| = \frac{1}{n_0(n_0+1)}.$$

Donc pour $r = \frac{1}{n_0(n_0+1)}$ on a $B(1/n_0, r) \cap X = \{1/n_0\}$ et donc $\{1/n_0\}$ est un ouvert de X.

Exercice 3.
Pour x un point de E (respectivement de F) et $r > 0$ on note $B_E(x,r)$ (resp. $B_F(x,r)$) la boule ouverte dans E (resp. F) de centre x et de rayon r.
1) Supposons que f vérifie **i)**. Soit V un ouvert de F. Si $f^{-1}(V)$ est vide, alors il est ouvert. Si $f^{-1}(V)$ est non-vide, on fixe $x \in f^{-1}(V)$. Par définition, $y := f(x)$ est dans V. Puisque V est un ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_F(y,\epsilon) \subset V$. D'après **i)**, il existe $\eta > 0$ tel que si $z \in B_E(x,\eta)$ alors $f(z) \in B_F(y,\epsilon)$. Donc, pour tout $z \in B_E(x,\eta)$, $f(z) \in V$ ce qui implique que $B_E(x,\eta) \subset f^{-1}(V)$ et donc que $f^{-1}(V)$ est ouvert.
Inversement, supposons que f vérifie **ii)**. Soit $x \in E$ et soit $\epsilon > 0$. On pose encore $y := f(x)$. La boule $B_F(y,\epsilon)$ est ouverte donc d'après **ii)** $f^{-1}(B_F(y,\epsilon))$ est un ouvert de E. De plus $f(x) \in B_F(y,\epsilon)$, c-à-d $x \in f^{-1}(B_F(y,\epsilon))$. Puisque cette ensemble est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B_E(x,\eta) \subset f^{-1}(V)$ ou dit autrement : pour tout $z \in E$, $d_E(x,z) < \eta$ implique $d_F(f(x), f(z)) < \epsilon$, ce qui donne **i)**.
2) Soit $x \in E$. Puisque $\overline{A} = E$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de A qui converge vers x. En utilisant que f et g sont continues et que $f_{|A} = g_{|A}$, on obtient

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

3) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(0) = 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = 1$. On vérifie alors que $h^{-1}([0,1]) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
1) D'après le cours, une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ est un $x \in E$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $N \geq 0$ il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B(x,\epsilon)$. (Dans le polycopié, les boules centrées en x sont remplacées par les voisinages de x.)
2) Pour $k \geq 0$, on pose $F_k := \overline{\{x_n \,|\, n \geq k\}}$ et $F := \cap_{k\geq 0} F_k$. Si x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ et si $k \geq 0$ alors par la définition ci-dessus, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \geq k$ tel que $x_n \in B(x,\epsilon)$, c-à-d $\{x_l \,|\, l \geq k\} \cap B(x,\epsilon) \neq \varnothing$. On en déduit que pour tout $k \geq 0$, $x \in F_k$ et donc que $x \in F$.
Inversement, si $x \in F$ et $k \geq 0$ alors $x \in F_k$. Ceci implique, d'après la définition de l'adhérence, que pour tout $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap \{x_n \,|\, n \geq k\} \neq \varnothing$, c-à-d qu'il existe $n \geq k$ tel que $x_n \in B(x,\epsilon)$. Pour résumer, on a montré que si $x \in F$ alors pour tout $k \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \geq k$ tel que $x_n \in B(x,\epsilon)$, ce qui correspond exactement à la définition ci-dessus. Tous les éléments de F sont donc bien des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 5.
A est fermé car il est le produit de deux intervalles fermés. Donc $\overline{A} = A$. L'intérieur de A est égal à $]0,1[^2$. En effet, $]0,1[^2$ est un ouvert contenu dans A, il est donc contenu dans l'intérieur de A. Fixons un point $(x,y) \in A\backslash]0,1[^2$. On a alors $x \in \{0,1\}$ ou $y \in \{0,1\}$. Si $x = 0$ et $r > 0$ alors $(x - r/2, y) \in B((x,y), r)$ et $(x - r/2, y) \notin A$. On en déduit (x,y) n'est pas dans l'intérieur de A. Les cas $x = 1$ et $y \in \{0,1\}$ se traitent de la même façon et on obtient que l'intérieur de A est contenu dans $]0,1[^2$.
La frontière de A est par définition $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ et donc $\partial A = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.
L'adhérence de B est $[0,2] \times [0,1]$ (cet ensemble est un fermé contenant B et pour chaque point p de $[0,2] \times [0,1]$ on construit facilement une suite de B qui converge vers p).
L'intérieur de B est $(]0,1[\cup]1,2[)\times]0,1[$ (il s'agit bien d'un ouvert contenu dans B et

$$B \setminus (]0,1[\cup]1,2[)\times]0,1[=]1,2[\times\{0,1\}$$

et comme ci-dessus, on vérifie facilement que ces points ne peuvent pas être dans l'intérieur de B).
On en déduit que $\partial B = ([0,2] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1,2\} \times [0,1])$.