
Partiel – 2h

Aucun document n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Exercice 1.
Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer que E et l'ensemble vide $\varnothing$ sont des ouverts de E.
2) Montrer que E et l'ensemble vide $\varnothing$ sont des fermés de E.
3) Soit $A, B \subset E$. Parmi les inclusions suivantes, démontrer celles qui sont toujours vraies. Pour les autres, donner un exemple d'espace métrique (E, d) et de parties $A, B \subset E$ où elles ne sont pas vérifiées.

$$\textbf{a)}\ \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \textbf{b)}\ \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}, \quad \textbf{c)}\ \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}, \quad \textbf{d)}\ \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Exercice 2.
On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, c-à-d $d(x, y) = |x - y|$.

1) a) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? **b)** Est-il un fermé de $\mathbb{R}$?
2) On note A l'intersection de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ qui contiennent le segment $[0, 1]$. Déterminer A.
3) On pose $X = \left\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$. On munit X de la distance induite par la distance d sur $\mathbb{R}$. Déterminer tous les $x \in X$ tels que le singleton $\{x\}$ est un ouvert de X.

Exercice 3.
Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que les deux caractérisations de la continuité ci-dessous sont équivalentes.

i) $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E$, $d_E(x, y) \leq \eta$ implique $d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

ii) Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

2) Soit g une deuxième application entre E et F. Soit $A \subset E$ une partie dense de E. Montrer que si f et g sont continues et que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$.
3) Donner un exemple d'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h^{-1}([0, 1])$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle).

Exercice 4.
Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E.

1) Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ est égal à $\bigcap_{k\geq 0} \overline{\{x_n \,|\, n \geq k\}}$.

Exercice 5.
On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit de la distance usuelle, $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. On pose

$$A = [0, 1]^2 \quad \text{et} \quad B =]0, 1[^2 \cup (]1, 2[\times [0, 1]).$$

Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de A puis faire de même avec B.