Exercice 1

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit la sphère unité $S := \{x \in E\colon \|x\| = 1\}$.

a) Si $x, y \in S$ et $y \neq -x$, montrer que

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x+ty}{\|(1-t)x+ty\|}, \quad t \in [0,1],$$

définit une application continue de $[0,1]$ dans S vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

b) En déduire que, si $\dim(E) \geq 2$, alors S est connexe par arcs.

Exercice 2

Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques. On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *localement constante* si $\forall x \in E$ il existe un voisinage de x sur lequel f soit constante.

a) Montrer qu'une application localement constante $f\colon E \to F$ est continue.

b) Donner un exemple d'une application localement constante qui ne soit pas constante.

c) Si E est connexe, montrer que toute application localement constante $f\colon E \to F$ est constante.

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $D^+ = \{(x,y) \in I^2\colon y > x\}$.

a) Montrer que D^+ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. En utilisant la fonction $F\colon I^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x) - f(y)$, montrer que f est strictement monotone.

Exercice 4

a) (Théorème du passage des douanes) Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie de X. La frontière de A est notée ∂A. Montrer que si $C \subset X$ est connexe et que

$$\mathring{A} \cap C \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathring{\widehat{A^c}} \cap C \neq \varnothing,$$

alors C rencontre ∂A.

b) En déduire qu'une fonction $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue admet un point fixe. (Il est aussi possible de le montrer par le théorème des valeurs intermédiaires.)

Exercice 5

Rappelons que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{S}^1$ est connexe.

b) En déduire que si $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.

c) En déduire que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n := \{(x, nx) \ : \ x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

a) Est-ce que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$?

b) Est-ce que $\overline{A}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$?

c) Déterminer les composantes connexes de A.