Exercice 1

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, montrer que la partie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a\}$ est compacte.

Exercice 2

Soit (X,d) un espace métrique compact.

a) Montrer que pour tout $r > 0$ il existe un nombre fini $N \geq 1$ de points x_i, $1 \leq i \leq N$, tels que $X = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i, r)$.

b) On dit qu'un espace métrique est séparable s'il contient une partie dense au plus dénombrable. Déduire du point a) que X est séparable.

Exercice 3

a) Soit (X,d) un espace métrique, $F \subset X$ un fermé et $K \subset X$ un compact. Montrer que si $F \cap K = \varnothing$ alors $d(F,K) > 0$.

b) Donner un exemple de deux fermés F_1, F_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $d(F_1,F_2) = 0$.

Exercice 4

Soit (X,d) un espace métrique compact et $f\colon X \to X$ une application vérifiant $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) \leq d(f(x), f(y))$.

a) Montrer que f est injective.

b) On note $f^n := f \circ \cdots \circ f$, la n-ième itérée de f. Vérifier que $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) \leq d(f^n(x), f^n(y))$.

c) Soit $(x,y) \in X^2$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f^n(x), f^n(y))_{n\geq 0}$ qui converge, c-à-d qu'il existe une fonction strictement croissante $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f^{\phi(n)}(x), f^{\phi(n)}(y))_{n\geq 0}$ converge.

d) On pose, pour $n \geq 0$, $\psi(n) := \phi(n+1) - \phi(n)$. Montrer que $(f^{\psi(n)}(x))_{n\geq 0}$ converge vers x et que $(f^{\psi(n)}(y))_{n\geq 0}$ converge vers y.

e) En déduire que
- — f est une isométrie, c'est-à-dire : $\quad \forall (x,y) \in X^2 \quad d(x,y) = d(f(x), f(y))$;
- — f est continue ;
- — f est bijective.

Exercice 5

Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Rappelons que $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ équipé de l'addition et la multiplication standard des fonctions forme un anneau commutatif, c-à-d l'addition en fait un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition, associative, commutatif et possède un élément neutre : la fonction constante égale à 1. Enfin, un idéal I de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ est un sous-ensemble tel que

$$\begin{array}{ll} \forall (f,g) \in I^2 & f+g \in I, \\ \forall f \in I,\ g \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R}) & fg \in I. \end{array}$$

a) Déterminer les éléments inversibles de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, c-à-d $f \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel qu'il existe $g \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, $fg = 1$.

b) Soit $x \in X$. Montrer que $I_x := \{f \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.

c) Soit I un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel que $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$. Montrer que I ne peut pas contenir d'éléments inversibles.

d) Soit I un idéal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tel que $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que pour tout $f \in I$, $f(x) = 0$.

e) Caractériser les idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$, c-à-d les idéaux $I \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tels que si I est contenu dans un idéal J alors $J = I$ ou $J = \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.