Exercice 1

Considérons deux espaces métriques (X,d) et (Y,d') et une application $f\colon X \to Y$.

a) Si f est uniformément continue, montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy de X est une suite de Cauchy de Y. La réciproque est-elle vraie ?

b) Si f est bijective, uniformément continue et de réciproque continue, montrer que si Y est complet, alors X est aussi complet.

Exercice 2

Soit $B = C([0,1])$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel les fonctions continues $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Pour $f, g \in B$, on définit

$$\begin{aligned} d_2(f,g) &= \Big(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\ d_\infty(f,g) &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|. \end{aligned}$$

a) Montrer que d_2 définit une métrique sur B.

b) On considère la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de B définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}\,; \\ 1 + \frac{n}{2} - nt & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\,; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans (B, d_2).

c) Est-ce que (f_n) est une suite de Cauchy dans (B, d_∞) ?

d) Est-ce que (B, d_2) est un espace métrique complet ?

Exercice 3

On note par ℓ^2 l'ensemble des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty$.

a) Montrer que ℓ^2 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les opérations

$$\begin{aligned} (x_n)_n + (y_n)_n &:= (x_n + y_n)_n\,; \\ \lambda (x_n)_n &:= (\lambda x_n)_n \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

b) Pour $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ dans ℓ^2, on pose $d(x,y) = \big(\sum\limits_{n\geq 1} |x_n - y_n|^2\big)^{1/2}$. Montrer que (ℓ^2, d) est un espace métrique.

c) Utiliser la complétude de $\mathbb{C}$ pour montrer que (ℓ^2, d) est un espace métrique complet.

Exercice 4

a) Soient E un espace métrique complet et $T\colon E \to E$ une application continue telle que T^p soit contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T possède un unique point fixe.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ une application continue non identique à 1. En considérant l'application

$$T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$$

donnée par

$$(Tf)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))dy \quad \forall x \in [0,1],$$

montrer qu'il existe une unique solution $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)) \ \forall x \in [0,1].$$