Exercice 1

Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $Y \subset X$, on définit $d(x,Y) := \inf_{y\in Y} d(x,y)$.
Soient Y_0 et Y_1 deux fermés non vides disjoints de X.

a) Montrer que pour $x,y \in X$ on a $|d(x,Y_0) - d(y,Y_0)| \leq d(x,y)$.

b) Montrer que la fonction $g\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x,Y_0)$ est continue et s'annule si et seulement $x \in Y_0$.

c) Utiliser la métrique d pour construire une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $f|_{Y_0} = 0$ et $f|_{Y_1} = 1$.

d) Soit Y un sous-ensemble quelconque de X. Déterminer l'ensemble des $x \in X$ tels que $d(x,Y) = 0$.

Exercice 2

Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Si $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme, montrer que si on pose

$$d(x,y) := d_Y(f(x), f(y)),$$

pour tout $x,y \in X$, alors d_X et d sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3

Soit (X,d_X) un espace métrique et soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une application. On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles

$$\{x \in X \,|\, f(x) < a\} \quad \text{et} \quad \{x \in X \,|\, f(x) > a\}$$

sont des ouverts de X.

Pour les deux exercices suivants, rappelons que si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont deux espaces métriques il y a plusieurs manières de mettre une distance sur le produit $X \times Y$. Dans le cours, trois exemples ont été donnés : si $z_1 = (x_1,y_1)$ et $z_2 = (x_2,y_2)$ sont deux points de $X \times Y$ alors

$$\delta_1(z_1,z_2) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2), \;\; \delta_2(z_1,z_2) = (d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2)^{1/2}$$
$$\text{et} \;\; \delta_\infty(z_1,z_2) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\},$$

définissent trois distances équivalentes sur $X \times Y$. Dans la suite on parlera de *distance produit* (ou *métrique produit*) sur $X \times Y$ pour l'une quelconque de ces trois distances.

Exercice 4

Soit (E,d) un espace métrique. On munit le produit $E \times E$ d'une métrique produit. Montrer que $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 5

Soient (X,d), (Y,d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. On pose $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$, L'espace produit $X \times Y$ est muni d'une métrique produit.

a) Soit l'application $\Psi_f\colon X \to \Gamma_f$ définie par $\Psi_f(x) = (x, f(x))$. On munit $\Gamma_f \subset X \times Y$ de la métrique induite. Montrer que f est continue si et seulement si Ψ_f est un homéomorphisme.

b) Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé dans $X \times Y$.

c) Donner un exemple d'application f qui n'est pas continue mais pour laquelle Γ_f soit une partie fermée de $X \times Y$.

Exercice 6

Soit (X,d), (Y,d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie B de Y on a $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B)$.

Exercice 7

Soit (X,d), (Y,d') des espaces métriques et f, g deux applications continues entre X et Y. Montrer que

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

Exercice 8

Soit $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'espaces métriques.

a) Montrer que pour $a,b,c \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b+c$, on a $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

b) Soit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$. Pour $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X, on pose $d(x,y) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x(n),y(n))}{1+d_n(x(n),y(n))}$.
Montrer que d définit bien une fonction de $X \times X$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que d est une métrique sur X.

d) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans (X,d) si et seulement si toutes les suites composantes $(x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent dans (X_n,d_n), $n \in \mathbb{N}^*$.

e) En déduire que les projections canoniques $\pi_n\colon (X,d) \to (X_n,d_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont continues.