Exercice 1

Soit E un ensemble. On considère deux distances d et d' sur E. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ on ait

$$d(x,y) \leq \alpha d'(x,y).$$

Montrer que les ouverts de (E,d) sont des ouverts de (E,d').

Exercice 2

Soit (X,d) un espace métrique. Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en $x \in X$ et de rayon r. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on désigne par $\tilde{B}(x,r)$ la boule fermée centrée en $x \in X$ de rayon r.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in X$, $B(x,r)$ est un ouvert.

b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in X$, $\tilde{B}(x,r)$ est un fermé. En déduire que les singletons sont fermés.

c) Si d est la métrique discrète sur X, comparer l'adhérence de $B(x,r)$ à $\tilde{B}(x,r)$ et l'intérieur de $\tilde{B}(x,r)$ à $B(x,r)$.

d) Toujours en supposant que d est la métrique discrète sur X, déterminer quelles sont les partie de X qui sont ouvertes dans (X,d). Même question pour les fermés.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que pour la distance associée à une norme $\|.\|$, l'adhérence de la boule ouverte $B(0,1)$ est la boule fermée $\tilde{B}(0,1)$.

Exercice 4

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa distance euclidienne. Déterminer les adhérences, les intérieurs et les frontières des parties suivantes :

$$A = \{(x,y)\ ;\ 2x \geq y\}, \quad B = \{(x,y)\ ;\ 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1\}, \quad C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \quad D = A \cap \mathbb{Q}^2.$$

Exercice 5

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties disjointes de X. Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Est-ce encore le cas si on suppose A est fermé ?

Exercice 6

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X d'intérieur vide.

a) L'ensemble $A \cup B$ est-il encore d'intérieur vide ?

b) Même question en supposant A et B fermés.

c) Même question en supposant A et B ouverts.

Exercice 7

Soit (X,d) un espace métrique. Soit $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ pour $x, y \in X$.

a) Montrer que d' définit une métrique bornée sur X.

b) Est-ce que la métrique d' est équivalente à la métrique d ?

c) Montrer que les espaces métriques (X,d) et (X,d') ont les mêmes ouverts.

Exercice 8

Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k ; k \geq n\}}$.

Exercice 9

Soit (X,d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Combien d'ensembles distincts peut-on créer au maximum à partir de A en utilisant les opérations adhérence et intérieur. Dit autrement, combien d'ensembles distincts y a-t-il au maximum dans la liste suivante :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\dots$$

Donner un exemple de A qui maximise ce nombre (fini ou infini) quand $X = \mathbb{R}$.