Exercice 1 Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables :

a) $\{2^n;\ n \geq 0\}$;

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;

d) l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 2 Soit X un ensemble dénombrable.

a) Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.

b) Qu'en est-il de l'ensemble des parties de X ? (Cantor)

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est un ensemble au plus dénombrable.

Exercice 4 Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables :

a) l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$;

b) l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$;

c) l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$;

d) l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ayant un nombre fini de termes non nuls.

Exercice 5 Soit $\mathscr{P} \subset \mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On appelle *nombre algébrique* tout nombre complexe qui est racine d'un polynôme appartenant à $\mathscr{P}$.

a) Donner un exemple (simple) de bijection entre $\mathscr{P}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^*)$.

b) En déduire que $\mathscr{P}$ est dénombrable.

c) Si $P \in \mathscr{P}$, on note $Z(P)$ l'ensemble des racines de P. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est $\bigcup_{P \in \mathscr{P}} Z(P)$.

d) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 6 Soit la partie $A = \{1/2^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $[0, 1[$.

a) Vérifier que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A, \\ 2x & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

définie une application de $[0, 1[$ dans $[0, 1]$.

b) Montrer que f est une bijection.

c) Utiliser la bijection f pour trouver une bijection de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$.

Exercice 7 Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$. Soit $\mathscr{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini. Soit $\mathscr{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est infini.

a) Vérifier que $2^{\mathbb{N}}$ est réunion disjointe de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{I}$, et que $\mathscr{F}$ est dénombrable.

b) Montrer que $\mathscr{I}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.

c) Soit la fonction $\phi : \mathscr{I} \to [0, 1[$ définie par

$$\phi(A) = \sum_{i \geq 0} \frac{\chi_A(i+1)}{2^{i+1}}, \quad A \in \mathscr{I},$$

où χ_A est la fonction indicatrice de A. Vérifier que cette fonction est bien définie.

d) Montrer que ϕ est une application bijective de $\mathscr{I}$ sur $[0, 1[$.

e) En déduire que $\mathbb{R}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.