Exercice 1 Déterminer si les applications suivantes, définies sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont des bijections.

a) $f(m,n) = 2^m 5^n$.

b) $g(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$.

Exercice 2 Soient X et Y deux ensembles non vides et $f\colon X \to Y$ une application. Une application $s\colon Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$ s'appelle une section de f.

a) Montrer que si f admet une section, alors f est surjective.

b) Montrer que toute section de f est injective.

Une application $r\colon Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$ s'appelle une rétraction de f.

c) Montrer que si f possède une rétraction, alors f est injective.

d) Montrer que toute rétraction de f est surjective.

e) En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a $r = s$.

Exercice 3 On associe à une application $f\colon X \to Y$ deux applications : $\mathbf{f}\colon 2^X \to 2^Y$ et $\mathbf{f}^{-1}\colon 2^Y \to 2^X$, appelées respectivement application image directe et application image réciproque, et définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(A) &= \{y \in Y : \text{ il existe un } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}, \quad A \subset X\ ; \\ \mathbf{f}^{-1}(B) &= \{x \in X : f(x) \in B\}, \quad B \subset Y. \end{aligned}$$

Soient deux parties $A \subset X$ et $B \subset Y$, ainsi que $(A_\mu)_{\mu \in M}$ une famille de parties de X et $(B_\nu)_{\nu \in N}$ une famille de parties de Y. Établir les propriétés suivantes :

$$\mathbf{f}^{-1}(B^{\complement}) = (\mathbf{f}^{-1}(B))^{\complement}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(B)) \subset B, \qquad A \subset \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(A)), \qquad \mathbf{f}^{-1}(\bigcap_{\nu \in N} B_\nu) = \bigcap_{\nu \in N} \mathbf{f}^{-1}(B_\nu),$$

$$\mathbf{f}^{-1}(\bigcup_{\nu \in N} B_\nu) = \bigcup_{\nu \in N} \mathbf{f}^{-1}(B_\nu), \qquad \mathbf{f}(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu) \subset \bigcap_{\mu \in M} \mathbf{f}(A_\mu), \qquad \mathbf{f}(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu) = \bigcup_{\mu \in M} \mathbf{f}(A_\mu).$$

Remarque. On fait systématiquement l'abus de notation qui consiste à écrire $f(A)$ pour $\mathbf{f}(A)$ et $f^{-1}(B)$ pour $\mathbf{f}^{-1}(B)$. Pire, lorsque $A = \{a\}$ ou $B = \{b\}$ sont des singletons, on écrit souvent $f(a)$ au lieu de $f(\{a\})$, alors que $f(\{a\})$ est le singleton $\{f(a)\}$, et $f^{-1}(b)$ au lieu de $f^{-1}(\{b\})$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ pouvant être vide ou contenir plus d'un élément.

Exercice 4 Soient X et Y deux ensembles et $f\colon X \to Y$ une application. Soient $V \subset X$ et $W \subset Y$.

a) Montrer l'équivalence : $V \subset f^{-1}(W) \iff f(V) \subset W$.

b) La proposition $V = f^{-1}(W) \iff f(V) = W$ est-elle vraie ?

Exercice 5 Soient E, F et G trois ensembles, et f une application de E vers F. On suppose que G a au moins deux éléments et on considère les applications :

$$f_*\colon E^G \to F^G \quad \text{définie par} \quad f_*(\varphi) = f \circ \varphi\ ; \qquad f^*\colon G^F \to G^E \quad \text{définie par} \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. f_* est injective ;
3. f^* est surjective.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective ;
2. f_* est surjective ;
3. f^* est injective.