Université de Bourgogne

Topologie des espaces métriques

Johan TAFLIN

2018-2019

Préface

Ce texte est destiné aux étudiants de troisième année de licence de mathématiques à l'université de Bourgogne. Il s'agit d'une introduction à la topologie des espaces métriques. Ce texte se base fortement sur des notes de Giuseppe Dito, qu'il en soit remercié. Cette version est susceptible de contenir des coquilles et des erreurs. Tout commentaire est le bienvenu.

Méthodologie : L'assimilation d'un nouveau cours est difficile et exige un travail personnel assidu. Il est important de s'approprier les notions, de trouver ses propres exemples et contre-exemples, de connaître les définitions, de s'interroger sur les hypothèses des énoncés etc.

Chapitre 1

Calcul ensembliste et dénombrabilité

1.1 Rappels de calcul ensembliste

Soit E un ensemble. On note 2^E ou $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E c'est-à-dire «A est un élément de 2^E» équivaut à dire que «A est une partie de E», ou écrit autrement :

$$A \in 2^E \Leftrightarrow A \subset E.$$

L'ensemble 2^E contient toujours la partie vide $\varnothing$ et la partie pleine E. Si E est un ensemble à n éléments, alors 2^E contient 2^n éléments. En particulier, si $E = \varnothing$, alors $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$ est un ensemble à un élément.

Soient E et F deux ensembles. On dit qu'une partie Γ_f du produit cartésien $E \times F$ définit une application f de E dans F, si la propriété suivante est satisfaite :

$$\text{Quel que soit } x \in E, \text{ il existe un et un seul } y \in F \text{ tel que } (x,y) \in \Gamma_f.$$

Ceci est une version (trop ?) abstraite d'une notion que vous devez déjà bien savoir manipuler. Mais essayez de la comprendre.

L'unique $y \in F$ défini par la propriété précédente est noté $f(x)$. On note l'application définie par la partie Γ_f par $f\colon E \longrightarrow F$. La partie Γ_f s'appelle le **graphe** de l'application f et on a :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \ ; \ x \in E\}.$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Rappelons qu'une application $f\colon E \to F$ est dite **injective** si :

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \ ;$$

et f est dite **surjective** si :

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Une application à la fois injective et surjective est dite bijective. On utilise aussi les substantifs : injection, surjection et bijection.

Pour une partie A de E, on note $f|_A$ la **restriction** de f à A. Il s'agit de l'application définie par

$$f|_A : A \to F \quad \text{et} \quad f|_A(x) = f(x), \forall x \in A.$$

À toute partie A de E est associée sa **fonction indicatrice** $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Pourquoi est-ce une bijection ?

La correspondance $A \mapsto \chi_A$ est une bijection de 2^E sur $\{0,1\}^E$.

Si $A \subset E$, on note $A^{\complement}$ le complémentaire de A, c'est-à-dire l'ensemble des points de E qui n'appartiennent pas à A.

Remarque 1.1 *Bien que la notation $A^{\complement}$ ne l'indique pas, cet ensemble dépend de E. Par exemple, si $A =]0,1[$ alors $A^{\complement} = \{0,1\}$ si $E = [0,1]$ et $A^{\complement} =]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$ si $E = \mathbb{R}$. S'il y a une ambiguïté, on pourra utiliser la notation $\complement_E A$.*

Notez que le même problème se pose pour plusieurs concepts de ce cours (en particulier : ouvert, fermé, intérieur, adhérence) et qu'il est source de nombreuses confusions et d'erreurs.

La différence d'ensembles est notée $A \setminus B$, c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On a $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$. Si $B \subset A$, alors $\complement_A B = A \setminus B$.

1.1.1 Familles d'ensembles, réunions, intersections et produits

Soit M un ensemble. Si pour tout $\mu \in M$ on se donne une partie E_μ d'un ensemble E, on dit que $(E_\mu)_{\mu \in M}$ est une famille de parties de E indexée par M. L'intersection et la réunion de la famille $(E_\mu)_{\mu \in M}$ sont données respectivement par

$$\bigcap_{\mu \in M} E_\mu = \{x \in E \; ; \; \forall \mu \in M, \; x \in E_\mu\},$$

$$\bigcup_{\mu \in M} E_\mu = \{x \in E \; ; \; \exists \mu \in M \text{ tel que } x \in E_\mu\}.$$

En particulier, si $M = \{1,2\}$ alors

$$\bigcap_{\mu \in M} E_\mu = E_1 \cap E_2 \quad \text{et} \quad \bigcup_{\mu \in M} E_\mu = E_1 \cup E_2.$$

Savez-vous prouvez ces égalités ?

Lois de Morgan :

$$\Big(\bigcap_{\mu \in M} E_\mu\Big)^{\complement} = \bigcup_{\mu \in M} E_\mu^{\complement}, \qquad \Big(\bigcup_{\mu \in M} E_\mu\Big)^{\complement} = \bigcap_{\mu \in M} E_\mu^{\complement}.$$

Soient $(E_\mu)_{\mu \in M}$ et $(F_\nu)_{\nu \in N}$ deux familles d'ensembles. On a les propriétés suivantes :

$$\Big(\bigcap_{\mu \in M} E_\mu\Big) \cup \Big(\bigcap_{\nu \in N} F_\nu\Big) = \bigcap_{(\mu,\nu) \in M \times N} E_\mu \cup F_\nu,$$

$$\Big(\bigcup_{\mu \in M} E_\mu\Big) \cap \Big(\bigcup_{\nu \in N} F_\nu\Big) = \bigcup_{(\mu,\nu) \in M \times N} E_\mu \cap F_\nu.$$

Produit cartésien d'ensembles :

Définition 1.2 *Soient A un ensemble non vide et $(E_a)_{a\in A}$ une famille d'ensembles indexée par A. On appelle **produit** des E_a l'ensemble des applications $x\colon A \longrightarrow \bigcup_{a\in A} E_a$ telles que $\forall a \in A$, $x(a) \in E_a$. On note le produit de la famille $(E_a)_{a\in A}$ par $\prod_{a\in A} E_a$.*

Pour $\forall i \in A$, l'application $\pi_i\colon \prod_{a\in A} E_a \longrightarrow E_i$ définie par $\pi_i(x) = x(i)$ s'appelle la projection (canonique) sur E_i.

Là encore, vous devez déjà connaître la notion et cette définition peut vous paraître abstraite.

Si tous les E_a sont égaux au même ensemble F, alors $\prod_{a\in A} E_a = \prod_{a\in A} F = F^A$. En partiulier, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est le produit $\prod_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Si $A = \{1,\ldots,n\}$, on retrouve la notion habituelle de produit cartésien de n ensembles : $\prod_{a\in A} E_a = E_1 \times \cdots \times E_n$.

1.1.2 Images directe et réciproque de parties

Soients $f\colon E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. On associe à l'application f deux applications $\tilde{f}\colon 2^E \mapsto 2^F$ et $\tilde{f}^{-1}\colon 2^F \mapsto 2^E$ appelées respectivement application **image directe** et application **image réciproque**. Ces applications sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(A) &= \{y \in F\ ;\ \text{il existe un } x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}, \quad A \subset E,\\ \tilde{f}^{-1}(B) &= \{x \in E\ ;\ f(x) \in B\}, \quad B \subset F.\end{aligned}$$

Remarque 1.3 *On fait systématiquement l'abus de notation qui consiste à écrire $f(A)$ pour $\tilde{f}(A)$ et $f^{-1}(B)$ pour $\tilde{f}^{-1}(B)$. Pire, lorsque $A = \{a\}$ ou $B = \{b\}$ sont des singletons, on écrit souvent $f(a)$ au lieu de $f(\{a\})$, alors que $f(\{a\})$ est le singleton $\{f(a)\}$, et $f^{-1}(b)$ au lieu de $f^{-1}(\{b\})$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ pouvant être vide ou contenir plus d'un élément.*

Considérons une application $f\colon E \to F$, deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$, ainsi que $(A_\mu)_{\mu\in M}$ une famille de parties de E et $(B_\nu)_{\nu\in N}$ une famille de parties de F. Les propriétés suivantes des images directes et réciproques sont fondamentales :

Encore une fois, savez-vous montrer ces égalités et ces inclusions ? Et pourquoi les inclusions inverses ne sont-elles pas toujours proposées ?

$$f^{-1}(B^\complement) = (f^{-1}(B))^\complement \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\nu\in N} B_\nu\Big) = \bigcap_{\nu\in N} f^{-1}(B_\nu) \qquad f^{-1}\Big(\bigcup_{\nu\in N} B_\nu\Big) = \bigcup_{\nu\in N} f^{-1}(B_\nu)$$

$$f\Big(\bigcap_{\mu\in M} A_\mu\Big) \subset \bigcap_{\mu\in M} f(A_\mu) \qquad f\Big(\bigcup_{\mu\in M} A_\mu\Big) = \bigcup_{\mu\in M} f(A_\mu)$$

1.2 Ensembles dénombrables et équipotence

1.2.1 Ensembles équipotents

Définition 1.4 (Equipotence) *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **équipotent** à F s'il existe une bijection de E sur F.*

Si E est **équipotent** à F, on dit aussi que ces ensembles ont **même cardinalité**. On écrit $|E| = |F|$ ou $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ pour signifier que E est équipotent à F

Exemple 1.5
1. *Deux intervalles ouverts bornés et non vides* $]a,b[$ *et* $]a',b'[$ *sont équipotents par la bijection* $f\colon\,]a,b[\to]a',b'[,\ t\mapsto a' + \frac{(t-a)}{(b-a)}(b'-a')$.
2. *La bijection* $\arctan\colon \mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *montre que* $\mathbb{R}$ *est équipotent à* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *et donc à n'importe quel intervalle ouvert non vide.*
3. *Pour un ensemble* E*, l'ensemble* 2^E *est équipotent à* $\{0,1\}^E$*, car* $A\mapsto\chi_A$ *est une bijection de* 2^E *sur* $\{0,1\}^E$.

Proposition 1.6 (Cantor) *Soit* E *un ensemble. L'ensemble* 2^E *n'est pas équipotent à* E.

Preuve. Le cas $E=\varnothing$ est immédiat : $\varnothing$ n'a aucun élément, alors que $2^{\varnothing}$ est un singleton.

Supposons donc $E\neq\varnothing$. Soit une application $\phi\colon E\to 2^E$. On va montrer qu'elle ne peut pas être surjective. Considérons l'élément $A=\{x\in E\ ;\ x\notin\phi(x)\}$ de 2^E. Supposons que $a\in E$ soit un antécédent de A, c'est-à-dire $\phi(a)=A$. Si $a\in A$, on aurait $a\in\phi(a)$ ce qui est contradictoire avec $a\notin\phi(a)$. Si $a\notin A$, c'est-à-dire $a\notin\phi(a)$, on aurait $a\in A$, ce qui est absurde. Donc l'application ϕ n'est pas surjective et, a fortiori, E et 2^E ne peuvent pas être en bijection. □

Proposition 1.7 *Soit* $f\colon E\longrightarrow F$ *une application.*
1. *Si* f *est injective, alors il existe une application surjective* $g\colon F\longrightarrow E$ *telle que* $g\circ f=\mathrm{Id}_E$.
2. *Si* f *est surjective, alors il existe une application injective* $g\colon F\longrightarrow E$ *telle que* $f\circ g=\mathrm{Id}_F$.

Preuve. 1) Supposons que $f\colon E\longrightarrow F$ soit injective. On va construire une application g ayant les propriétés désirées. Fixons un élément $x_0\in E$. Soit $y\in F$. S'il existe un $x\in E$ tel que $f(x)=y$, cet élément x est nécessairement unique par l'injectivité de f et on pose $g(y)=x$. S'il n'existe pas de $x\in E$ tel que $f(x)=y$, on pose $g(y)=x_0$. On a ainsi défini une application $g\colon F\longrightarrow E$. Par construction, on a $g(f(x))=x$, $\forall x\in E$, c'est-à-dire $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ et cette dernière égalité implique directement que g est surjective.

Pourquoi cette dernière phrase est elle vraie ?

2) Supposons que $f\colon E\longrightarrow F$ soit surjective. Pour tout $y\in F$, notons par α_y l'ensemble des antécédents de y. Pour tout $y\in F$, l'ensemble α_y est une partie non vide de E car f est surjective. Pour chaque y dans F, on **choisit** (voir Remarque 1.8 ci-dessous) dans α_y qu'on note $g(y)$. On a donc défini une application $g\colon F\longrightarrow E$ qui à y associe $g(y)$. Par construction, pour tout $y\in F$, $g(y)$ est un antécédent de y pour l'application f, donc $f(g(y))=y$, c'est-à-dire $f\circ g=\mathrm{Id}_F$. Cette égalité implique directement que g est injective. □

Idem.

Remarque 1.8 *Étant donné un ensemble non vide* E*, il est naturel de s'autoriser à choisir un élément* x *dans* E*. En répétant ce type de choix, si* $E_1,\ldots,E_n$ *est une famille finie d'ensembles non vides, on obtient des éléments* $x_1,\ldots,x_n$ *tels que pour tout* $1\le i\le n$*,* $x_i\in E_i$*. En revanche, il est peut-être moins naturel de faire de tels choix une infinité de fois. Pour s'autoriser à le faire, on invoque* ***l'axiome du choix*** *qui stipule que si* $(E_\mu)_{\mu\in M}$ *est une famille quelconque d'ensembles non vides, on peut choisir une famille* $(x_\mu)_{\mu\in M}$ *telle que pour tout* $\mu\in M$*,* $x_\mu\in E_\mu$*. Dit autrement, si pour chaque* $\mu\in M$*,* $E_\mu\neq\varnothing$ *alors* $\prod_{\mu\in M}E_\mu\neq\varnothing$.

Proposition facultative.

Proposition 1.9 *Soient* A_0*,* A_1 *et* B_0 *trois ensembles tels que* $A_1\subset B_0\subset A_0$*. Si* A_0 *et* A_1 *sont équipotents, alors* B_0 *est équipotent à* A_0 *(et donc à* A_1*).*

Preuve. Les ensembles A_0 et A_1 sont équipotents, choisissons une bijection $f\colon A_0 \longrightarrow A_1$. On définit par récurrence deux familles de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$A_{n+1} = f(A_n), \quad B_{n+1} = f(B_n),$$

(on avait déjà que $A_1 = f(A_0)$). De $A_1 \subset B_0 \subset A_0$, on déduit que $B_{n+1} \subset A_{n+1} \subset B_n \subset A_n$.

On pose

$$C_n = A_n \setminus B_n \ (n \geq 0) \quad \text{et} \quad C = \bigcup_{n\geq 0} C_n.$$

L'application f est bijective, on a donc $f(C_n) = C_{n+1}$ et $f(C) = \bigcup_{n\geq 1} C_n$. De plus, de $C_n \subset A_n$, on a que $C \subset A_0$.

Pour $x \in A_0$, on définit :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C, \\ x & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Vérifions que, pour tout $x \in A_0$, $g(x)$ est dans B_0. Si $x \in C$, on a $g(x) = f(x) \in A_1$, car $f\colon A_0 \longrightarrow A_1$. Mais $A_1 \subset B_0$, donc $g(x) \in B_0$. Si $x \notin C$, alors $x \notin C_0$ et donc $x \in B_0$, car $C_0 = A_0 \setminus B_0$. Donc si $x \notin C$, $g(x) = x \in B_0$. On a ainsi défini une application $g\colon A_0 \longrightarrow B_0$.

On va montrer que l'application g est bijective. Montrons d'abord l'injectivité. D'après la définition de g, la restriction de g à C est injective (car f l'est) et $g(C) = f(C) \subset C$. La restriction de g à $A_0 \setminus C$ est $\mathrm{Id}_{A_0\setminus C}$, donc injective. Les parties $f(C)$ et $A_0 \setminus C$ étant disjointes, on conclut que g est injective.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit $y \in B_0$.

- Si $y \notin C$, alors $g(y) = y$, donc y est un antécédent de lui-même.

- Si $y \in C$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $y \in C_n$. On a nécessairement $n \geq 1$, car $y \in B_0$ ne peut pas appartenir à $C_0 = A_0 \setminus B_0$. Donc $y \in \bigcup_{n\geq 1} C_n = f(C)$ et il existe un $x \in C$ tel que $y = f(x)$. Puisque $f(x) = g(x)$, x est un antécédent de y. On conclut que g est surjective.

L'application $g\colon A_0 \longrightarrow B_0$ est donc bijective. □

Remarque 1.10 *En utilisant les notations introduites après la Définition 1.4, la Proposition 1.9 signifie que si* $A_1 \subset B_0 \subset A_0$ *et* $|A_0| = |A_1|$, *alors* $|A_0| = |B_0| = |A_1|$.

Théorème 1.11 (Cantor-Bernstein) *Soient E et F des ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.*

Preuve. Soient $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow E$ des applications injectives. L'application composée $g\circ f\colon E \longrightarrow E$ est injective et donc $(g\circ f)(E)$ est équipotent à E. On a $(g\circ f)(E) \subset g(F) \subset E$.

En appliquant la Proposition 1.9 à $A_0 = E$, $B_0 = g(F)$ et $A_1 = (g\circ f)(E)$, on conclut qu'il existe une bijection $h\colon E \longrightarrow g(F)$. L'application $\tilde{g}\colon F \longrightarrow g(F)$ définie par $\tilde{g}(y) = g(y)$, $\forall y \in F$, est bijective et, donc, la composée $\tilde{g}^{-1}\circ h\colon E \longrightarrow F$ est bijective, ce qui démontre le théorème. □

1.2.2 Ensembles dénombrables

Rappelons dans un premier temps qu'un ensemble E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1,\ldots,n\}$ (le cas $n = 0$ correspondant à l'ensemble vide). Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Définition 1.12 *On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de E sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, si E est équipotent à $\mathbb{N}$). On dit que E est au plus dénombrable s'il existe une bijection de E sur une partie de $\mathbb{N}$.*

Savez-vous le montrer ?

Exemple 1.13 *Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.*

Proposition 1.14 *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Preuve. Soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. La partie E est non vide et donc contient un plus petit élément qu'on note e_0 (car $\mathbb{N}$ est bien ordonné). Posons $E_1 = E \setminus \{e_0\}$. La partie E_1 est non vide, sinon E serait un ensemble fini, et on note e_1 son plus petit élément. En définissant $E_{i+1} := E_i \setminus \{e_i\} = E \setminus \{e_0, \dots, e_i\}$, où e_i est le plus petit élément de E_i, on obtient ainsi une suite décroissante $(E_i)_{i \geq 0}$ de parties non vides de $\mathbb{N}$ et une suite strictement croissante $(e_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{N}$. Soit $x \in E$. Il existe un $j \in \mathbb{N}$ tel que $e_j \leq x < e_{j+1}$, car la suite $(e_i)_{i \geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers. Si x n'était pas égal à e_j, x serait le plus petit élément de E_{j+1}, ce qui est en contradiction avec $x < e_{j+1}$. Donc $x = e_j$. Cela montre que l'application $i \mapsto e_i$ de $\mathbb{N}$ dans E est surjective. Cette application est aussi injective, car la suite $(e_i)_{i \geq 0}$ est strictement croissante. Donc E est en bijection avec $\mathbb{N}$ et est donc dénombrable. □

Remarque 1.15 *La proposition précédente reste valable si on remplace $\mathbb{N}$ par l'importe quel ensemble dénombrable.*

Comment adapte-t-on la preuve à ce cas ?

Il résulte de la proposition précédente qu'un ensemble au plus dénombrable est ou bien un ensemble fini, ou bien un ensemble dénombrable. La proposition suivante s'avère très utile dans la pratique.

Proposition 1.16
1. *S'il existe une injection d'un ensemble E dans $\mathbb{N}$, alors E est au plus dénombrable.*
2. *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur un ensemble E, alors E est au plus dénombrable.*
3. *En particulier, si E est un ensemble infini et vérifie l'une des propriétés 1) ou 2), alors E est dénombrable.*

Est-ce si clair ?

Pourquoi ?

Preuve. 1) Soit $f : E \to \mathbb{N}$ une application injective. Alors f réalise une bijection de E sur $f(E) \subset \mathbb{N}$. Donc E est au plus dénombrable. Si E est infini, il en est de même pour $f(E)$ et, d'après la Proposition 1.14, E est dénombrable.

2) Soit $f : \mathbb{N} \to E$ une surjection. D'après la Proposition 1.7, il existe une application injective $g : E \longrightarrow \mathbb{N}$ et, d'après 1), E est au plus dénombrable et, si E est infini, il est dénombrable. □

Pourquoi ?

On peut remplacer $\mathbb{N}$ par n'importe quel ensemble dénombrable dans la proposition précédente.

Proposition 1.17 *Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Saurez-vous écrire cette récurrence ?

Preuve. Il suffit de considérer le produit de deux ensembles dénombrables $E \times F$. La généralisation à un nombre fini d'ensembles dénombrables est immédiate par récurrence. Remarquons d'abord que $E \times F$ est équipotent à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En effet, soient $g : E \to \mathbb{N}$ et $h : F \to \mathbb{N}$ deux bijections. Alors l'application $(a, b) \mapsto (g(a), h(b))$ est une bijection de $E \times F$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Il nous suffit donc d'établir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Il est clair que cet ensemble est infini (il contient tout les couples (n, n) avec $n \in \mathbb{N}$). Par ailleurs, l'unicité de la décomposition en

Pourquoi ?

nombres premiers implique que $(m,n) \mapsto 2^m 3^n$ est injective. La Proposition 1.16 implique alors que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. □

Exemple 1.18 *L'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. L'ensemble des nombres rationels $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$ où le rationel $\frac{p}{q}$ est écrit sous forme irréductible avec $q \geq 1$. Donc $\mathbb{Q}$ est aussi dénombrable.*

Proposition 1.19 *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Preuve. Soit $(E_\mu)_{\mu \in M}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, c'est-à-dire M est un ensemble dénombrable et pour chaque $\mu \in M$, l'ensemble E_μ est dénombrable. Soit $\psi \colon \mathbb{N} \to M$ une bijection. Pour chaque μ, on **choisit** une bijection $\phi_\mu : \mathbb{N} \to E_\mu$. Soit $E = \bigcup_{\mu \in M} E_\mu$. Considérons l'application $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E$ définie par $f(m,n) = \phi_{\psi(m)}(n)$. Elle est surjective. En effet, soit $x \in E$, il existe un $\mu \in M$ tel que $x \in E_\mu$. Soit m l'antécédent de μ par l'application ψ et soit n l'antécédent de x par l'application ϕ_μ, alors $x = \phi_{\psi(m)}(n)$. Donc, d'après la Proposition 1.7 2), E est au plus dénombrable et, puisqu'il est infini, E est dénombrable. □

On peut remplacer *dénombrable* par *au plus dénombrable* dans les Propositions 1.17 et 1.19.

Proposition 1.20 *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un ensemble infini non dénombrable.*

Preuve. D'après la Proposition 1.14 et la remarque qui la suit, il suffit de montrer que la partie $]0,1[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : en effet, si $\mathbb{R}$ était dénombrable, alors $]0,1[$ serait aussi dénombrable. On va montrer que toute application $\mathbb{N} \longrightarrow]0,1[$ est nécessairement non surjective, ce qui montrera que $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow]0,1[$ une application. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \phi(n)$. Chaque a_n est un réel dans $]0,1[$ et soit $a_n = 0, a_n^1 a_n^2 a_n^3 \cdots$ son développement décimal (propre). On construit un réel $x \in]0,1[$ en se donnant son développement décimal (propre) $x = 0, x^1 x^2 x^3 \cdots$ de la manière suivante : on choisit la $i^{\text{ème}}$ décimale de x, i.e. x_i, entre 1 et 8 de façcon à ce que x_i soit différent de a_i^i. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \neq a_n = \phi(n)$, car par définition de x, la $n^{\text{ème}}$ décimale après la virgule de x est différente de la $n^{\text{ème}}$ décimale après la virgule de a_n. Par conséquent, x n'est pas dans l'image de ϕ et donc ϕ ne peut pas être surjective. □

Proposition 1.21 *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$.*

Preuve. Cf. fiche de TD 2.

Remarques informelles sur la cardinalité

La cardinalité d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble, et on le note $|E|$ ou $\mathrm{card}(E)$. On dit aussi que $|E|$ est le cardinal de E.

Pour les ensembles infinis, il est aussi possible d'introduire la notion de cardinal, mais cela requiert des notions plus avancées de la théorie des ensembles qui vont au-delà de ce cours. La notion de cardinal permet de comparer des infinis entre eux. Par exemple, les Propositions 1.20 et 1.21 nous laissent soupçonner que $\mathbb{R}$ a *strictement plus d'éléments* que $\mathbb{N}$ bien qu'ils soient des ensembles infinis. On peut facilement trouver une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, mais il n'y a pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. La théorie des cardinaux donne un sens à l'énoncé «le cardinal de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que le cardinal de $\mathbb{N}$».

Comme nous l'avons déjà dit, $|E| = |F|$ si et seulement si il y a une bijection entre E et F, c-à-d E et F sont équipotent. On peut définir un ordre entre cardinaux. On écrit $|E| \leq |F|$ s'il existe une injection de E dans F (ou de manière équivalente, s'il existe une surjection de F vers E). Avec cette convention, le Théorème de Cantor-Bernstein peut se formuler comme suit : si $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |E|$, alors $|E| = |F|$. On écrit $|E| < |F|$ lorsque $|E| \leq |F|$ et $|E| \neq |F|$.

La théorie des cardinaux permet aussi d'introduire une arithmétique des cardinaux : somme, produit, puissance, etc. Par exemple, pour des ensembles E et F, le produit des cardinaux $|E|\,|F|$ est défini comme étant le cardinal du produit cartésien $E \times F$, c'est-à-dire $|E|\,|F| := |E \times F|$. La puissance $|E|^{|F|}$ est par définition égale à $|E^F|$.

La cardinalité de $\mathbb{N}$ est traditionnellement notée $\aleph_0$ ($\aleph$ se lit *aleph*, elle est la première lettre de l'alphabet hébraïque). La cardinalité de $\mathbb{R}$ est notée $\mathfrak{c}$, c'est celle du continu, et on a vu que $\mathfrak{c} > \aleph_0$. L'arithmétique des cardinaux peut quelques fois sembler paradoxale. On sait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$ et, en termes de cardinaux, cela se traduit par $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ (mais $\aleph_0 \neq 1$!). Dit autrement, on peut multiplier des cardinaux entre eux mais pas les diviser.

Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Définitions et résultats fondamentaux

Définition 2.1 *Soit E un ensemble (non vide). On appelle **distance** ou **métrique** sur E toute application $d\colon E\times E\longrightarrow\mathbb{R}_+$ satisfaisant pour tout points x,y,z de E :*

1. $d(x,y)=0 \iff x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x)$;
3. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

*On appelle **espace métrique** le couple (E,d), i.e., l'ensemble E muni d'une distance d.*

Les espaces vectoriels normés représentent une classe très importante d'espaces métriques. Rappelons-en la définition.

Définition 2.2 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). On appelle **norme** sur V toute application $\|\;\|\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{R}_+$ satisfaisant pour tout vecteurs u,v de V :*

1. $\|u\|=0 \iff u=0$;
2. $\|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$;
3. $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

*On appelle **espace vectoriel normé** le couple $(V,\|\;\|)$, i.e., l'espace vectoriel V muni d'une norme $\|\;\|$.*

Exemple 2.3 *A tout espace vectoriel normé $(E,\|\;\|)$ est naturellement associé la métrique $d(x,y)=\|x-y\|$. Sauf mention contraire, un espace vectoriel normé sera muni de la distance associée à sa norme.*

En particulier, sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on a trois distances classiques :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|;\\ d_2(x,y) &= \Big(\sum_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2};\\ d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}\big(|x_i-y_i|\big). \end{aligned}$$

Exemple 2.4 *Sur n'importe quel ensemble E, on définit la* ***métrique discrète*** *par*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y, \\ 1 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Pouvez-vous dessiner la boule de centre (2,0) et de rayon 3 pour cette métrique ?

Exemple 2.5 *Sur $\mathbb{R}^2$ on définit la* ***métrique sncf*** *par*

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & si\ x\ et\ y\ sont\ colinéaires, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & si\ x\ et\ y\ ne\ sont\ pas\ colinéaires. \end{cases}$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes d'une distance d sur un ensemble E :

1. $d(x_1,x_n) \leq \sum_{1\leq i\leq n-1} d(x_i,x_{i+1}),\ \forall x_1,\dots,x_n \in E$;
2. $|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$, $\forall x,y,z \in E$.

Définition 2.6 *Soient (E,d) un espace métrique, un point $x \in E$ et un nombre réel positif r.*

1. *On appelle* ***boule ouverte*** *centrée en x de rayon $r > 0$ la partie*
   $B(x,r) := \{y \in E\ ;\ d(x,y) < r\}$ *;*
2. *On appelle* ***boule fermée*** *centrée en x de rayon $r \geq 0$ la partie*
   $\tilde{B}(x,r) := \{y \in E\ ;\ d(x,y) \leq r\}$ *;*
3. *On appelle* ***sphère*** *centrée en x de rayon $r \geq 0$ la partie*
   $S(x,r) := \{y \in E\ ;\ d(x,y) = r\}$.

Propriété élémentaire : Si $0 < r < r'$, alors $B(x,r) \subset \tilde{B}(x,r) \subset B(x,r')$.

Remarque 2.7 *Ces ensembles dépendent de l'ensemble E et de la distance d. Par exemple, sur $(\mathbb{R},d)$ avec $d(x,y) = |x-y|$ alors $B(1,2) =]-1,3[$ alors que sur $([0,3],d)$ on a $B(1,2) = [0,3[$.*

Définition 2.8 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.*

On dit que A est un ***ouvert*** *ou A est une* ***partie ouverte*** *de (E,d) si*

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset A.$$

On dit que A est un ***fermé*** *(ou A est une* ***partie fermée****) de (E,d) si $A^{\complement}$ est un ouvert de (E,d).*

Remarque 2.9 *La notion d'ouvert est un point clé de ce cours. L'ensemble de tous les ouverts de (E,d) s'appelle la* ***topologie*** *de (E,d) et donne son nom à ce cours.*

Pourquoi ces quatre affirmations sont vraies ?

Exemple 2.10 *Dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$,*

1. $]0,1[$ *et* $]-\infty,0[$ *sont des ouverts,*
2. $[0,1]$ *et* $[1,+\infty[$ *sont des fermés,*
3. $\mathbb{R}$ *est à la fois fermé et ouvert,*
4. $[0,1[$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

Remarque 2.11 *«Ouvert» et «fermé» ne sont pas des antonymes. Dire «A n'est pas un ouvert» ne signifie pas «A est un fermé». On vient de voir dans l'Exemple 2.10 qu'il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés alors que d'autres sont à la fois ouverts et fermés. En particulier, E et $\varnothing$ sont toujours ouverts et fermés dans (E,d).*

Pourquoi ?

Remarque 2.12 *De manière similaire à la Remarque 2.7, les notions d'ouvert et de fermé ne sont pas absolues : elles dépendent de l'espace ambiant E et de la distance d. L'ensemble $[0,3[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$ mais il est ouvert et fermé dans $([0,3[,|\cdot|)$.*

Proposition 2.13

1. *Toute boule ouverte d'un espace métrique (E,d) est un ouvert.*
2. *Toute boule fermée d'un espace métrique (E,d) est un fermé. En particulier, un singleton $\{x\} = \tilde{B}(x,0)$ est un fermé.*

Preuve. En TD.

Proposition 2.14 *Tout ouvert d'un espace métrique (E,d) est une union de boules ouvertes.*

Proposition 2.15 *Soit (E,d) un espace métrique.*

1. *$\varnothing$ et E sont des ouverts de (E,d).*
2. *Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert de (E,d).*
3. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert de (E,d).*

Attention : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. En effet, $\bigcap\limits_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R},|\,|)$.

Proposition 2.16 *Soit (E,d) un espace métrique.*

1. *$\varnothing$ et E sont des fermés de (E,d).*
2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé de (E,d).*
3. *Une union **finie** de fermés est un fermé de (E,d).*

Attention : Une union quelconque de fermés n'est pas nécessairement un fermé. En effet, $\bigcup\limits_{n\geq 2} [1/n, 1-1/n] =]0,1[$ n'est pas un fermé de $(\mathbb{R},|\,|)$.

Définition 2.17 *Soient (E,d) un espace métrique et x un point de E. On appelle **voisinage** de x toute partie de E qui contient un ouvert contenant x. On note $\mathscr{V}(x)$ la famille des voisinages de x.*

Remarque 2.18 *La notion de voisinages est commode mais dans la pratique on pourra presque toujours remplacer dans un raisonnement les voisinages de x par les boules $B(x,r)$ centrées en x.*

Proposition 2.19 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.*

1. *A est un voisinage de $x \in E$ si et, seulement si, il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans A.*
2. *A est un ouvert de E si et, seulement si, A est voisinage de chacun de ses points.*

Définition 2.20 *Soient (E,d) un espace métrique, A une partie de E et x un point de E. On dit que x est **adhérent** à A si tout voisinage de x contient un point de A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **l'adhérence** de A et est noté $\overline{A}$.*

Remarque 2.21 *Il est possible (et facile) de montrer que les points adhérents à A peuvent être classés en deux types différents :*

1. *On dit que $x \in E$ est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x contient un point de A différent du point x.*
2. *On dit que x est un **point isolé** de A si $x \in A$ et x n'est pas un point d'accumulation de A. Autrement dit, x est un point isolé s'il existe $U \in \mathscr{V}(x)$ tel que $A \cap U = \{x\}$.*

Soit A une partie d'un espace métrique (E,d). Nous allons voir dans la prochaine proposition que $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A. Mais les termes «plus petit» méritent une explication. On dit que X est le plus petit sous-ensemble de E vérifiant une propriété P si X vérifie lui même P et que pour tout $Y \subset E$ vérifiant la propriété P on a $X \subset Y$. Si un tel X existe (ce qui n'est pas toujours le cas) il est égale à l'intersection de tous les Y contenus dans E vérifiant P, ou écrit autrement

Pourquoi cette affirmation est-elle vraie ?

$$X = \bigcap_{Y \subset E,\ Y \text{ vérifie } P} Y.$$

Mais de tels ensembles n'existent pas toujours. Par exemple, il n'y a pas de plus petit ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$ (car l'intersection de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$ est égale à $[0,1]$ qui n'est pas un ouvert). Par contre, grâce à la Proposition 2.16, il existe toujours un plus petit fermé de E contenant A.

Pourquoi ?

Proposition 2.22 *L'adhérence de $A \subset (E,d)$ est le plus petit fermé de E contenant A. En particulier, A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Proposition 2.23 *Soient (E,d) un espace métrique et A, B des parties de E on a :*

1. $A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
3. *Si F est un fermé et $A \subset F$, alors $A \subset \overline{A} \subset F$.*

Attention : L'adhérence d'une boule ouverte $B(x,r)$ n'est pas nécessairement la boule fermée $\tilde{B}(x,r)$. En général, on a $\overline{B(x,r)} \subset \tilde{B}(x,r)$. Par contre, si la métrique est celle associée à une norme sur un espace vectoriel, alors on a $\overline{B(x,r)} = \tilde{B}(x,r)$ (cf. TD).

De manière similaire à ci-dessus, si $A \subset E$ on peut considérer le plus grand ouvert de E contenu dans A. D'après la Proposition 2.15, un tel ensemble existe toujours.

Définition 2.24 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On appelle **intérieur** de A le plus grand ouvert de E contenu dans A. L'intérieur de A est noté $\mathring{A}$.*

Remarque : L'intérieur de A est donc l'union de tous les ouverts contenus dans A.

Proposition 2.25 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est un ouvert de E ;*
2. $A = \mathring{A}$.

Proposition 2.26 *Soient (E,d) un espace métrique et A, B des parties de E, on a :*

1. $\mathring{A} \subset A$, $\quad \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$;
2. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\quad \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$;
3. *Si U est un ouvert et $U \subset A$, alors $U \subset \mathring{A} \subset A$.*

Proposition 2.27 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E, on a :*

$$(\mathring{A})^{\complement} = \overline{(A^{\complement})}, \quad (\overline{A})^{\complement} = \overset{\circ}{\widehat{(A^{\complement})}}.$$

Définition 2.28 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On appelle **frontière** de A l'ensemble des points de E qui sont à la fois adhérents à A et $A^{\complement}$. La frontière de A est notée ∂A.*

Proposition 2.29 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E, on a :*

1. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$;
2. *∂A est un fermé de E.*

Définition 2.30 *Une partie A d'un espace métrique (E,d) est dite **dense** si $\overline{A} = E$.*

Exemple 2.31 *Un exemple classique (savez-vous encore le démontrer ?) est que $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Définition 2.32 *Un espace métrique est dit **séparable** s'il contient une partie dense au plus dénombrable.*

Exemple 2.33

1. *$\mathbb{Q}^n$ est dense dans $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $\mathbb{Q}^n$ étant dénombrable, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ est séparable.*
2. *Soit E l'ensemble des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent vers 0. On munit E de la distance définie par $d(x,y) := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n - y_n|$. L'ensemble des suites rationnelles ayant au plus un nombre fini de termes non-nuls est dénombrable et dense dans (E,d).*

Pourquoi cet ensemble est-il dénombrable et pourquoi est-il dense ?

Définition 2.34 *Un espace métrique (E,d) est **discret** si tous ses points sont isolés.*

Exemple 2.35

1. *Tout ensemble muni de la métrique discrète est discret !*
2. *Soit $A = \{1/n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$, alors (A,d) est un espace métrique discret.*

Définition 2.36 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. On appelle **diamètre** de A :*

$$diam(A) := \sup\{d(x,y) \; ; \; x,y \in A\}.$$

*Une partie est dite **bornée** si son diamètre est fini.*

Définition 2.37 *Soient d et d' deux métriques sur un ensemble E. On dit que d et d' sont* ***équivalentes*** *s'il existe des nombres réels $\alpha, \beta > 0$ tels que*

$$\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y), \quad \forall x,y \in E.$$

Définition 2.38 *Si (E,d) et (E,d') ont les mêmes ouverts, on dit que les métriques d et d' sont* ***topologiquement équivalentes****. On dit alors que ces métriques définissent la même topologie sur E.*

Proposition 2.39 *Deux métriques équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

Attention. En général, la réciproque de cette proposition est fausse.

2.2 Métrique induite

Bien que très simple (et importante), la notion de métrique induite pose souvent problème.

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). La restriction de d à $A \times A$:

$$d|_{A\times A} \colon A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définit une métrique sur A.

Définition 2.40 *Soient (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E. La métrique $d|_{A\times A}$ s'appelle la métrique induite sur A. L'espace $(A, d|_{A\times A})$ est alors lui même un espace métrique.*

Attention. En général, les notions d'ouverts diffèrent dans (E,d) et dans $(A, d|_{A\times A})$. Faites toujours bien attention à dans quel espace métrique une partie est ouverte, fermée, ou pas. Par abus de notation, on écrit souvent d au lieu de $d|_{A\times A}$.

Proposition 2.41 *Soient (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E. La partie A est munie de la métrique induite par celle de E.*

1. *Une partie $U \subset A$ est ouverte dans A si, et seulement si, il existe un ouvert V de E tel que $U = V \cap A$.*
2. *Une partie $F \subset A$ est fermée dans A si, et seulement si, il existe un fermé K de E tel que $F = K \cap A$.*

Remarque 2.42 *Pour $x \in A$, on a $B_{d|_{A\times A}}(x,r) = B_d(x,r) \cap A$.*

2.3 Suites dans un espace métrique

Une suite indexée par $\mathbb{N}$ à valeurs dans un espace métrique (E,d) est un élément de $E^{\mathbb{N}}$. C'est donc une application $x \colon \mathbb{N} \longrightarrow E$. Selon le contexte, on note une suite x par $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (x_n). On considère aussi des suites définies à partir d'un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.43 *Soient (E,d) un espace métrique et ℓ un point de E. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans (E,d) (ou que ℓ est une limite de la suite (x_n)), si*

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N \ \text{ on a } x_n \in V.$$

Proposition 2.44 *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *ℓ est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;*
2. *$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $d(x, x_n) < \varepsilon$;*
3. *Tout voisinage $V \in \mathscr{V}(\ell)$ contient tous les termes x_n, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.*

Proposition 2.45 (Unicité de la limite) *Dans un espace métrique (E,d), si ℓ et ℓ' sont limites d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\ell = \ell'$.*

On note $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n$. Si une suite admet une limite, on dit aussi qu'elle est convergente.

Proposition 2.46 *Dans un espace métrique (E,d), une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. C'est-à-dire, l'ensemble $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de (E,d).*

Définition 2.47 *Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'espace métrique (E,d) (c'est-à-dire $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$). Une **sous-suite** ou une **suite extraite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $x\circ\phi\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$ où $\phi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Une suite extraite est souvent notée $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.48 *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.*

Définition 2.49 *Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E. On dit que $a \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. si*

$$\forall V \in \mathscr{V}(a),\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m \geq N \text{ tel que } x_m \in V.$$

Remarque. Une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (E,d) est un point adhérent à la partie $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \subset E$, mais la réciproque est fausse.

Proposition 2.50 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'espace métrique (E,d). Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;*
2. *Il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a ;*
3. *$\forall\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini ;*
4. *$a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k\ ;\ k \geq n\}}$.*

Proposition 2.51 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E, alors :*

1. *$a \in \overline{A}$ si et, seulement si, il existe une suite de A convergeant vers a.*
2. *A est un fermé de E si et, seulement si, toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.*

2.4 Continuité

Définition 2.52 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **continue au point** $a \in E$, si*

$$\forall V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists U \in \mathscr{V}(a)\ \text{ tel que }\ f(U) \subset V.$$

*On dit que f est **continue sur** E si f est continue en tout point de E.*

Cela se traduit de manière équivalente en utilisant le concept de limite : f est continue au point a si et seulement si $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$. En effet, par définition $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = \ell$ signifie précisément $\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$ ou écrit encore autrement

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } d_E(x,a) < \delta \text{ entraîne } d_F(f(x),l) < \varepsilon.$$

Proposition 2.53 *Soit $f\colon (E,d_E) \longrightarrow (F,d_F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue au point a ;*
2. *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $d_E(x,a) < \delta$ entraîne $d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$;*
3. *Pour toute suite (x_n) de E convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Proposition 2.54 *Soit $f\colon (E,d_E) \longrightarrow (F,d_F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue sur E ;*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E, c'est-à-dire : $\forall V \subset F$, ouvert de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E ;*
3. *L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E, c'est-à-dire : $\forall B \subset F$, fermé de F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.*

Proposition 2.55 *Soient (E,d_E), (F,d_F) et (G,d_G) des espaces métriques, $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow G$ des applications.*

1. *Si f est continue au point $a \in E$ et g est continue au point $f(a) \in F$, alors la composée $g \circ f$ est continue au point a.*
2. *Si f est continue sur E et g est continue sur F, alors la composée $g \circ f$ est continue sur E.*

Proposition 2.56 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques, A une partie dense de E, $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon E \longrightarrow F$ des applications continues. Si $f|_A = g|_A$, alors $f = g$.*

Définition 2.57 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est un **homéomorphisme** si f est bijective et si, de plus, f et sa réciproque f^{-1} sont continues. Deux espaces métriques sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

Exemple 2.58 *$[0,\infty[$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes, car une fonction continue et injective $f\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ne peut pas être surjective.*

Remarque 2.59 *Bien qu'à peine effleurée dans ce cours, la notion d'homéomorphisme est centrale en topologie. Il s'agit d'une des façons en mathématiques de comparer la "forme" de deux objets. De manière très grossière, deux objets sont homéomorphes s'il est possible de déformer l'un en l'autre sans le déchirer ou l'écraser (cette analogie est fausse mathématiquement mais illustre assez bien ce qu'est intuitivement un homéomorphisme).*

Définition 2.60 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est* ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ d_E(x,y) < \delta \ \text{ entraîne } \ d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition 2.61 *Une application uniformément continue entre deux espaces métriques est continue.*

Remarque : Les fonctions continues $f\colon E \longrightarrow F$ entre deux espaces métriques restent les mêmes si on passe à des métriques topologiquement équivalentes sur E ou F. Il n'en va pas de même pour les fonctions uniformément continues. Par exemple, sur $[0,\infty[$ considérons les deux distances $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = |x^2 - y^2|$. L'application identité vue comme application de $([0,\infty[,d)$ dans lui-même est uniformément continue, alors que comme application de $([0,\infty[,d)$ à valeurs dans $([0,\infty[,d')$ elle n'est que continue, bien que les distances d et d' soient topologiquement équivalentes.

Définition 2.62 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est* ***k-lipschitzienne*** *ou* ***lipschitzienne de rapport*** *k, si*

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k\, d_E(x,y), \qquad \forall x,y \in E.$$

Proposition 2.63 *Une application lipschitzienne entre deux espaces métriques est uniformément continue.*

Définition 2.64 *Soient (E,d_E) et (F,d_F) des espaces métriques et $f\colon E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une* ***isométrie****, si*

$$d_F(f(x), f(y)) = d_E(x,y), \qquad \forall x,y \in E.$$

Remarque : Toute isométrie est injective et 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

2.5 Produit d'espaces métriques

Produits d'ensembles

Le produit d'une famille quelconque d'ensembles $\{E_a\}_{a\in A}$ a été défini au chapitre 1 (cf. Definition 1.2).

Considérons une famille finie d'espaces métriques $\{(E_i,d_i)\}_{1\leq i\leq n}$. Le but de ce paragraphe est de définir une distance sur le produit cartésien $\prod_{1\leq i\leq n} E_i = E_1 \times \cdots E_n$ qui soit compatible avec les distances d_i.

Proposition 2.65 *Soit $\{(E_i,d_i)\}_{1\leq i\leq n}$ une famille d'espaces métrique. Soit $E := E_1\times\cdots\times E_n$.*

Les formules suivantes définissent des métriques sur E :

$$\begin{aligned}
\delta_1(x,y) &= \sum_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i);\\
\delta_2(x,y) &= \Big(\sum_{1\leq i\leq n} (d_i(x_i,y_i))^2\Big)^{1/2};\\
\delta_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}(d_i(x_i,y_i)).
\end{aligned}$$

où $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ sont des éléments de E.

Dans la suite, on parlera de *métrique produit* (ou de *distance produit*) pour l'une quelconque de ces trois métriques.

Proposition 2.66 *Les distances δ_a, $a=1,2,\infty$, sont équivalentes. En particulier, ces distances définissent les mêmes ouverts sur $E=E_1\times\cdots\times E_n$.*

Proposition 2.67 *Les projections $\pi_i\colon E_1\times\cdots\times E_n\longrightarrow E_i$ sont 1-lipschitziennes et, donc, continues.*

Proposition 2.68 *Pour $1\leq i\leq n$, soit U_i un ouvert de $(E_i,d_i))$. Le produit cartésien $U_1\times\cdots\times U_n$ est alors un ouvert de (E,δ_a), $a=1,2,\infty$.*

Soit $f\colon F\longrightarrow E$ une application définie sur un ensemble F à valeurs dans le produit $E=E_1\times\cdots\times E_n$. Pour $1\leq i\leq n$, on note $f_i:=\pi_i\circ f$ les applications composantes de f. On a donc $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$.

Proposition 2.69 *Soit (F,d_F) un espace métrique. Soit $E=E_1\times\cdots\times E_n$ muni d'une des distances δ_a, $a=1,2,\infty$. Une application $f\colon F\longrightarrow E$ est continue si, et seulement si, chacune de ses applications composantes $f_i\colon F\longrightarrow E_i$ est continue.*

Proposition 2.70 *Soit (F,d_F) un espace métrique. Soit $E=E_1\times\cdots\times E_n$ d'une des distances δ_a, $a=1,2,\infty$. Soit $f\colon E\longrightarrow F$ une application continue.*

Alors pour tout point $a=(a_1,\dots,a_n)\in E$, les applications partielles $\phi_i\colon E_i\longrightarrow F$ définies par

$$\phi_i(x_i)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

sont des applications continues de E_i dans F.

Attention. La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre la fonction $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

En effet, quel que soit $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
&\text{Si } a_2\neq 0, \qquad \phi_1(x)=\frac{xa_2}{x^2+a_2^2};\\
&\text{Si } a_2=0, \qquad \phi_1(x)=0.
\end{aligned}$$

Donc la fonction partielle ϕ_1 est continue. Il en est de même pour ϕ_2, mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

Proposition 2.71 *Soit $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de la distance δ_a, $a = 1,2,\infty$. Pour $1 \leq i \leq n$ et $k \in \mathbb{N}$, soit $x_i(k) = \pi_i(x(k))$. La suite $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si, et seulement si, les suites $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers $x_i := \pi_i(x)$ dans E_i.*

Produits infinis d'espaces métriques

Il est aussi possible de définir une métrique produit dans le cas d'un produit *dénombrable* d'espaces métriques.

Proposition 2.72 *Soit $\{(E_i,d_i)\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Alors la formule suivante :*

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x(i),y(i))}{1+d_i(x(i),y(i))}$$

définit une métrique sur $E = \prod_{i\in\mathbb{N}^*} E_i$.

De plus :

1. *Les projections $\pi_i \colon E \longrightarrow E_i$ sont continues.*
2. *Une suite $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de E converge si, et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ les suites $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent dans E_i.*

2.6 Notions sur la continuité dans les espaces vectoriels normés

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels considérés ici ne sont pas nécessairement de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme notée $\|\ \|$. Rappelons que :

1. La distance d associée à la norme $\|\ \|$ est définie par $d(v,w) = \|v-w\|$, $\forall v,w \in E$.
2. L' application $(v,w) \mapsto v+w$ de $E\times E$ dans E est continue.
3. L' application $(\lambda,v) \mapsto \lambda v$ de $\mathbb{K}\times E$ dans E est continue.
4. La norme est 1-lipschitzienne : $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v-w\|$, $\forall v,w \in E$.
5. Une norme $\|\ \|'$ sur E est dite équivalente à la norme $\|\ \|$, s'il existe deux nombres réels strictement positifs, α et β, tels que

$$\alpha\|v\| \leq \|v\|' \leq \beta\|v\|, \quad \forall v \in E.$$

Proposition 2.73 *Soit $T\colon (E,\|\ \|_E) \longrightarrow (F,\|\ \|_F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application T est continue ;*
2. *L'application T est continue en $0 \in E$;*

3. *L'application T est bornée (comme application linéaire), c'est-à-dire :*

$$\exists M \geq 0 \quad \textit{tel que} \quad \|T(v)\|_F \leq M\|v\|_E, \quad \forall v \in E;$$

4. *L'application T est lipschitzienne.*

On dit souvent application linéaire bornée au lieu d'application linéaire continue.

Remarque 2.74 *En général, une application linéaire n'est pas nécessairement continue. Par exemple, sur l'espace des fonctions continues sur le segment $[0,1]$, $E = C([0,1],\mathbb{R})$, considérons la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$. L'application linéaire $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$ n'est pas continue.*

En dimension infinie, on distingue le dual algébrique E^* du dual topologique E'. Le dual algébrique E^* est l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E (continues ou non), alors que le dual topologique E' est l'ensemble les formes linéaires *bornées* sur $(E, \| \|)$.

Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire bornée, alors il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $v \in E$ non-nul :

$$\frac{\|T(v)\|_F}{\|v\|_E} \leq M.$$

On note

$$\|T\| := \sup_{v \in E, v \neq 0} \frac{\|T(v)\|_F}{\|v\|_E}.$$

Proposition 2.75
1. *L'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F, noté $L_c(E,F)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
2. *L'application $\| \| : L_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme, appelée la norme-opérateur.*
3. *Si $E = F$ et $\| \|_E = \| \|_F$, alors pour tout $S, T \in L_c(E,E)$, on a $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

Remarque 2.76
1. *On a $\|T\| = \sup_{\|v\|_E = 1} \|T(v)\|_F = \sup_{\|v\|_E \leq 1} \|T(v)\|_F$.*
2. *Il est possible qu'une application linéaire soit bornée pour un choix de normes sur E et F mais non bornée pour d'autres normes. En particulier, le dual topologique E' dépend de la norme considérée sur E.*
3. *Deux normes équivalentes sur E définissent le même dual topologique.*

Proposition 2.77 *Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose E de dimension finie. Alors toute application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est bornée.*

Nous étudierons d'autres propriétés des espaces vectoriels normés dans les chapitres suivants.